MECÁNICA NEWTONIANA

2020 A

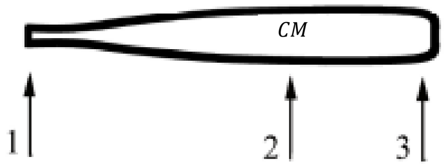
HOJA DE TRABAJO 12

SISTEMAS DE PARTÍCULAS, MECÁNICA DEL SÓLIDO: ESTÁTICA

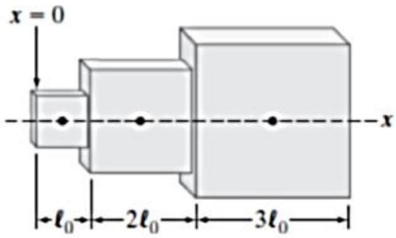
PREGUNTAS

CENTRO DE MASA

1. Considere un bate de béisbol como se muestra en la figura. El centro de masa se marca con CM en la figura. Las flechas indican fuerzas de igual magnitud y dirección que pueden aplicarse en puntos distintos del bate (solo una a la vez). Es correcto afirmar que:
   a) la aceleración del centro de masa será mayor cuando la fuerza se aplica en 1
   b) la aceleración del centro de masa será mayor cuando la fuerza se aplica en 2
   c) la aceleración del centro de masa será mayor cuando la fuerza se aplica en 3
   d) la aceleración del centro de masa es la misma en los 3 casos
   e) hace falta información para concluir cualquiera de las aseveraciones anteriores

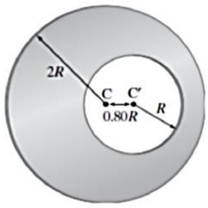


2. Tres cubos homogéneos del mismo material, de lados l_0, $2l_0$ y $3l_0$ están situados uno junto al otro (en contacto) con sus centros a lo largo de la línea recta x. ¿Cuál es la posición, a lo largo de esta línea, del centro de masa de este sistema?
   a) $\frac{49}{36}l_0$
   b) $\frac{97}{72}l_0$
   c) $\frac{277}{72}l_0$
   d) $\frac{69}{18}l_0$
   e) $\frac{53}{36}l_0$

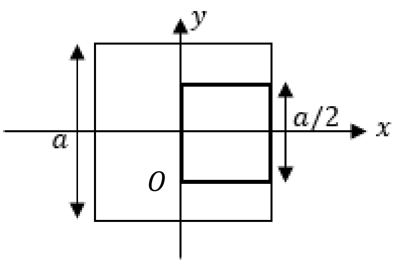


3. Un sistema aislado de dos partículas de igual masa (A y B) están separadas una cierta distancia. La partícula A está en reposo mientras que B se mueve con una rapidez v, alejándose de A. ¿Qué le pasa al centro de masa (CM) del sistema de las dos partículas? El CM:
   a) no se mueve
   b) se mueve alejándose de A con rapidez v
   c) se acerca hacia A con rapidez v
   d) se mueve alejándose de A con rapidez $v/2$
   e) se acerca hacia A con rapidez $v/2$

4. Una placa circular uniforme de radio $2R$ tiene un agujero circular de radio R. El centro C' del agujero está a una distancia de $0.8\,R$ de C. ¿Cuál es la posición del centro de masa de la placa?
   a) $2/9\,R$ a la izquierda de C
   b) $0.4\,R$ a la izquierda de C
   c) $4/15\,R$ a la izquierda de C
   d) $20/59\,R$ a la izquierda de C
   e) $0.4\,R$ a la derecha de C



5. En una placa cuadrada uniforme, de lado a, se corta una sección cuadrada, de lado $a/2$. El centro del agujero está a una distancia $a/4$ del centro de la placa original. La coordenada en x del centro de masa del cuerpo resultante x_{CM}, es:
   a) $x_{CM} = -a/2$
   b) $x_{CM} = -a/4$
   c) $x_{CM} = -a/6$
   d) $x_{CM} = -a/10$
   e) $x_{CM} = -a/12$

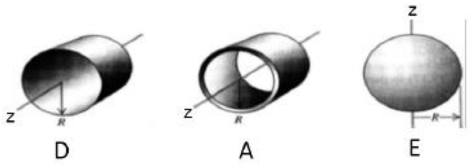


TORQUE – MOMENTO DE INERCIA

6. Se desea equilibrar un balancín de masa despreciable de 6 m de longitud, apoyado en un pivote a 2 m de su lado izquierdo, y tiene a su disposición 6 pesas de masa igual a 1 kg cada una. Si utiliza todos los pesos, deberá colocarlos en la siguiente configuración:
   a) 5 pesos en el lado izquierdo y 1 peso en el lado derecho
   b) 2 pesos en el lado izquierdo y 4 pesos en el lado derecho
   c) 4 pesos en el lado izquierdo y 2 pesos en el lado derecho
   d) 1 peso en el lado izquierdo y 5 pesos en el lado derecho
   e) 3 pesos en el lado derecho y 3 pesos en el lado derecho

7. Una viga homogénea de masa m y longitud L, está apoyada contra una pared vertical lisa. El extremo inferior de la viga descansa sobre una superficie horizontal rugosa, de manera que la viga forma un ángulo θ con el piso. La relación $\tan\alpha \,/\, \tan\theta$, donde α es el ángulo que forma la fuerza total que hace el piso sobre el extremo de la viga y la superficie horizontal es:
   a) $1/4$
   b) $1/2$
   c) 1
   d) 2
   e) 4

8. Considerando que todos los cuerpos tienen la misma masa M y radio R, ordene los siguientes cuerpos: cilindro de paredes delgadas (A), cilindro macizo (D), esfera maciza (E); de mayor a menor, en base a su momento de inercia respecto al eje z que se muestra en la figura.
   a) $I_E > I_D > I_A$
   b) $I_D > I_E > I_A$
   c) $I_A > I_D > I_E$
   d) $I_A > I_E > I_D$
   e) $I_E > I_A > I_D$



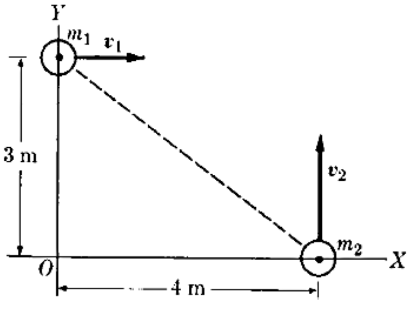
9. Una esfera maciza de hielo de masa M y radio R, se deja caer de lo alto de un plano inclinado sin rozamiento, de longitud L con un ángulo de inclinación α, determine la rapidez del centro de masa de la esfera al llegar a la base del plano inclinado.
   a) $v = \sqrt{\frac{10}{7}\, gL\, sin\alpha}$
   b) $v = \sqrt{2\, gL\, sin\alpha}$
   c) $v = \sqrt{\frac{6}{5}\, gL\, sin\alpha}$
   d) $v = \sqrt{gL\, sin\alpha}$
   e) $v = \sqrt{5\, gL\, sin\alpha}$

PROBLEMAS

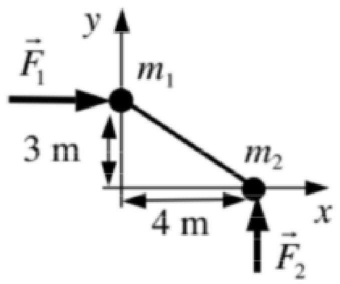
DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

1) Para las dos partículas de la siguiente figura, se sabe que $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 6$ kg , $\overrightarrow{v_1} = 2\,\vec{\imath}$ m/s, $\overrightarrow{v_2} = 3\,\vec{\jmath}$ m/s.
   a) Determine el momento angular total del sistema relativo a O y relativo al CM y verifique la relación entre ambos valores.
   b) Determine la energía cinética total relativa a O y relativa al CM y verifique la relación entre ambas.

   R: a) $\overrightarrow{J_{sis/o}} = 48\,\vec{k}$ kgm²/s, $\overrightarrow{J_{sis/CM}} = 14.4\,\vec{k}$ kgm²/s
   b) $E_{c\ sis/0} = 35$ J, $E_{c\ sis/CM} = 15.6$ J



2) Las masas $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 6$ kg están unidas por una barra rígida de masa despreciable. Estando inicialmente en reposo se hallan bajo la acción de las fuerzas constantes $\overrightarrow{F_1} = 8\,\vec{\imath}$ N y $\overrightarrow{F_2} = 6\,\vec{\jmath}$ N. Halle las coordenadas de su centro de masa como función del tiempo. Exprese el momento lineal en función del tiempo.



R: $\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{1}{4}(6+t^2)\,\vec{\imath} + \frac{3}{16}(10+t^2)\,\vec{\jmath}$ m, $\overrightarrow{p_{sis}} = 8t\,\vec{\imath} + 6t\,\vec{\jmath}$ kgm/s

3) Un cuerpo de masa m se mueve con velocidad $\vec{v}$ relativa a un observador O, y con velocidad $\overrightarrow{v'}$ relativa a O'. La velocidad relativa entre O y O' es $\vec{u}$. Halle la relación entre energías cinéticas E_k y $E_k{}'$ de la partícula medidas por O y O'. R: $E_k{}' = E_k + m\,\vec{v}\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}mu^2$

4) Calcule la posición del centro de masa y la velocidad del mismo, para el sistema:

$$m_1 = 4 \text{ kg} \qquad \overrightarrow{r_1} = (3t, 0{,}4) \text{ m}$$
$$m_2 = 6 \text{ kg} \qquad \overrightarrow{r_2} = (3+t, t^2, 1) \text{ m}$$
$$m_3 = 2 \text{ kg} \qquad \overrightarrow{r_3} = (0, t^2+t, t) \text{ m}$$

R: $\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{3}{2}(t+1)\,\vec{\imath} + \frac{t}{6}(4t+1)\,\vec{\jmath} + \frac{1}{6}(11+t)\,\vec{k}$ m, $\overrightarrow{v_{CM}} = 1.5\,\vec{\imath} + \frac{1}{6}(1+8t)\vec{\jmath} + \frac{1}{6}\,\vec{k}$ m/s

5) Una granada que cae verticalmente explota en 2 fragmentos iguales cuando se halla a una altura de 2000 m y tiene una velocidad dirigida hacia debajo de 60 m/s. Inmediatamente después de la explosión uno de los fragmentos se mueve hacia abajo a 80 m/s. Halle la posición del centro de masa del sistema 10 s después de la explosión. R: $\overrightarrow{r_{CM}} = 910\,\vec{\jmath}$ m

6) Un proyectil de masa m_1 accidentalmente explota en el punto más alto de su trayectoria. La distancia recorrida hasta el punto de la explosión es x_0. En la explosión, el proyectil se separa en dos pedazos que viajan horizontalmente. El pedazo más grande tiene una masa 3 veces más grande que el pedazo más liviano. El pedazo más liviano regresa a tierra exactamente en la misma posición de la que el proyectil fue disparado.

a) Halle la distancia x_f, medida desde el punto de disparo, que viaja el pedazo más pesado al llegar al suelo. Sugerencia: considere la posición del centro de masa del sistema cuando los pedazos llegan al suelo. R: $x_f = \frac{8}{3}x_0$

b) Halle la razón v_3/v_1 inmediatamente después de la explosión entre la rapidez del pedazo más grande v_3 y la rapidez v_1 del proyectil antes de la explosión. R: $\frac{5}{3}$

7) Un proyectil de 30 lb que se mueve sobre una superficie horizontal lisa en el plano xy pasa por el origen O con una velocidad $\overrightarrow{v_0} = 120\,\vec{\imath}$ ft/s cuando explota en dos fragmentos A y B, de 12 y 18 lb, respectivamente. Se sabe que 3 s después, la posición del fragmento A es $(300, 24)$ ft.

a) Calcule la posición del centro de masa del sistema 3 s después de la explosión.

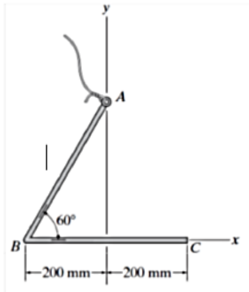
b) Determine la posición del fragmento B, 3 s después de la explosión.

R: a) $r_{CM} = (360{,}0)$ ft, b) $r_B = (400, -16)$ ft

8) Pruebe que si la energía cinética interna de un sistema de dos partículas es $E_{k,CM}$, las magnitudes de las velocidades de las partículas relativas al CM son:

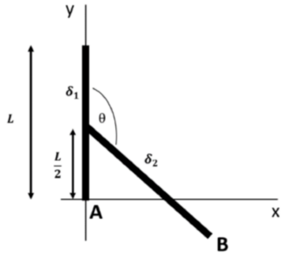
$$v_1 = \left[\frac{2m_2E_{k,CM}}{m_1(m_1+m_2)}\right]^{1/2}$$
$$v_2 = \left[\frac{2m_1E_{k,CM}}{m_2(m_1+m_2)}\right]^{1/2}$$

MECÁNICA DEL SÓLIDO:
CENTRO DE MASA



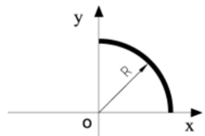
9) Un alambre uniforme de 800 mm se dobla por la mitad como indica la figura.
a) Encuentre la posición del centro de masa del sistema con respecto a los ejes xy de la figura. b) Si el alambre se suspende de A calcule el ángulo θ que forma el segmento AB con la vertical cuando el alambre se encuentre en equilibrio.
R: a) $\left(-50,50\sqrt{3}\right)$ mm, b) $\theta = 19.1°$

10) Considere una varilla delgada de longitud L, masa M y densidad lineal $\delta = 5x^2$.
a) Calcule la posición del centro de masa de la varilla x_{CM}.
b) Calcule el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a la varilla, que pasa por su centro de masa. R:a) $\frac{3}{4}L$, b) $I_{CM} = \frac{3}{80}ML^2$

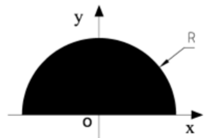


11) Calcule la posición del centro de masa para el sistema de dos varillas delgadas como se muestran en la figura, sí se sabe que su densidad varía de acuerdo con la expresión $\delta_A = 4s^2$ y $\delta_B = 5s^3$ respectivamente, donde s es la distancia desde el extremo marcado como A y B para cada varilla (extremos en los cuales la densidad es igual a 0). El ángulo $\theta = 150°$. Ambas varillas tienen longitud $L = 2$ m. Exprese su respuesta respecto al sistema de referencia mostrado en la figura.
R: $0.13\,\vec{\imath} + 0.94\,\vec{\jmath}$ m

12) Calcule, para cuerpos uniformes:
a) La posición del centro de masa del arco de circunferencia. R: $\frac{2R}{\pi}\vec{\imath} + \frac{2R}{\pi}\vec{\jmath}$



b) La posición del centro de masa de la media placa circular. R: $\frac{4R}{3\pi}\,\vec{\jmath}$



c) A que altura de la base se encuentra el centro de masa de una pirámide uniforme de altura H y base cuadrada. R: $\frac{H}{4}$

MOMENTO DE INERCIA

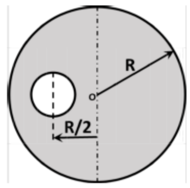
13) Una varilla delgada de 1 m de largo tiene una masa de 0.2 kg. Se colocan cinco cuerpos a lo largo de ella cada uno con una masa de 1 kg, y situados a 0 cm, 25 cm, 50 cm, 75 cm y 100 cm de uno de sus extremos. Calcule el momento de inercia del sistema con respecto a un eje perpendicular a la varilla, el cual pasa a través de: a) un extremo, b) la segunda masa y c) el centro de masa del sistema.
R: a)1.94 kgm^2, b) 0.967 kgm^2, c) 0.641 kgm^2

14) Demuestre que el momento de inercia de un sistema constituido por dos masas m_1 y m_2, separadas por una distancia r con respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa y perpendicular a la línea que une las dos masas, es μr^2, siendo μ la masa reducida del sistema.

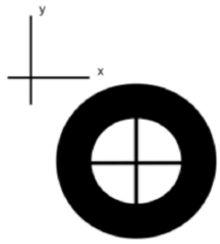
15) Tres masas, cada una de 2 kg, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden cada uno 10 cm. Calcule el momento de inercia del sistema con respecto a un eje perpendicular al plano determinado por el triángulo y que pase a través de: a) un vértice y b) el centro de masa.
R: a) 0.04 kgm^2, b) 0.02 kgm^2

16) Calcule el momento de inercia de un disco homogéneo de masa m y de radio R, con respecto a: a) un eje perpendicular que pasa por su centro y b) un eje que coincida con su diámetro.
R:a) $\frac{1}{2}mR^2$, b) $\frac{1}{4}mR^2$

17) En un disco uniforme de radio R, se corta una sección circular de radio $R/4$. Siendo la masa del cuerpo resultante M. El centro del agujero está a una distancia $R/2$ del centro del disco original. Determine el momento de inercia del cuerpo resultante respecto a un eje perpendicular al plano que contiene al disco y que pase por su centro. R: $\frac{247}{480}MR^2$



18) Considere una rueda de masa M, de radio externo R_2 y radio interno R_1 como se muestra en la figura. Desde el centro de la rueda parten cuatro varillas homogéneas iguales de masa $m = \frac{M}{10}$, radio r y longitud R_1. Calcule el momento de inercia del sistema con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano xy.



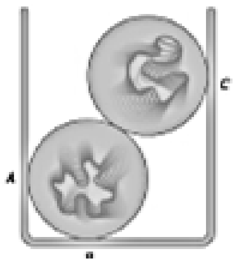
R: $\left(\frac{1}{10}r^2 + \frac{19}{30}{R_1}^2 + \frac{1}{2}{R_2}^2\right)M$

19) Calcule los momentos de inercia respecto a su eje de simetría de los siguientes cuerpos: a) esfera homogénea, b) cilindro hueco de paredes delgadas, c) cilindro homogéneo hueco de radio interior a y exterior b, d) sistema formado por una barra cilíndrica de paredes delgadas, radio R y longitud L unida a dos esferas de radio $2R$.

R: a) $\frac{2}{5}mR^2$, b) mR^2, c) $\frac{1}{2}m(a^2+b^2)$, d) $R^2\left(\frac{16}{5}m_e + m_c\right)$

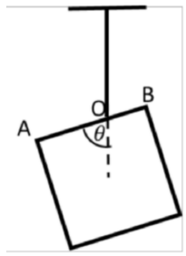
EQUILIBRIO

20) Dos canicas uniformes de 75 g y 2 cm de diámetro se apilan como se muestra en la figura, en un recipiente de 3 cm de anchura. a) Calcule la fuerza que el recipiente ejerce sobre las canicas en los puntos de contacto A, B y C. b) ¿Qué fuerza ejerce cada canica sobre la otra? R: a) $N_A = N_C = 0.424$ N, $N_B = 1.47$ N, b) 0.85 N



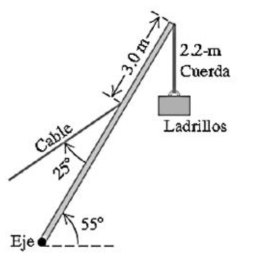
21) La figura muestra una placa cuadrada homogénea cuyo lado mide 80 cm que se encuentra en equilibrio colgando de una cuerda. Si $OB = 10$ cm, calcule el valor del ángulo θ que define la posición de equilibrio.

R:$53.13°$



22) Una grúa de 15000 N pivotea alrededor de un eje sin fricción en su base y está apoyada por un cable que forma un ángulo de $25°$ con la grúa (ver figura). La grúa tiene 16 m de largo y no es uniforme; su centro de gravedad está a 7 m desde la base medidos a lo largo de la grúa. El cable está unido a 3 m del extremo superior de la grúa. Cuando la grúa se levanta a $55°$ por encima de la horizontal, sosteniendo un palé de ladrillos de 11000 N mediante una cuerda muy ligera de 2.2 m, calcule a) la tensión en el cable y b) las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el eje sobre la grúa.

R: a) $T = 29336.34$ N, b) $\vec{R} = 25406.02\,\vec{\imath} + 40668.17\,\vec{\jmath}$ N



23) El elemento ABC, soportado por un pasador y una ménsula en C y un cable BD, se diseñó para soportar una carga P como se muestra en la figura. Si se sabe que la fuerza máxima que puede soportar el cable BD, es de 5 N, determine:
a) La magnitud de la fuerza P que puede aplicarse con seguridad.
b) La fuerza que el elemento ABC ejerce sobre el pasador en C cuando P es la fuerza máxima.
Nota: Desprecie el peso del elemento ABC.

R: a) $P \leq 2.76$ N, b) $\overrightarrow{R'} = 2.56\,\vec{\imath} + 0{,}39\,\vec{\jmath}$ N