

Ejercicios propuestos

1. Calcule las siguientes integrales utilizando primitivas:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4(x)} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} \quad ; \quad K = \int_1^4 \sqrt{x}(4-x) dx \quad ; \quad L = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} dx$$

$$M = \int_1^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) \sin^3(x) dx \quad ; \quad N = \int_0^1 2^x \cdot 4^{x+2} \cdot 6^{x+3} dx \quad ; \quad P = \int_1^e \frac{x+1}{x} (\ln(x)+x)^3 dx$$

2. Utilizando la fórmula de integración por partes, calcular las siguientes integrales:

$$I' = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^3} dx \quad ; \quad J' = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin(x)}{\cos^5(x)} dx \quad ; \quad K' = \int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x^2} dx$$

$$L' = \int_{-1}^1 2^x x dx \quad ; \quad M' = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$

3. Usando la fórmula de integración por cambio de variable, calcular las siguientes integrales:

$$A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{usando } x = \sin(t)) \quad ; \quad B = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (\text{usando } x = \sin^2(t))$$

$$C = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)} \quad \left(\text{usando } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad ; \quad D = \int_1^4 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx \quad (\text{usando } t = \sqrt{x})$$

4. Para n entero natural, se define:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

a) Calcular I_0 e I_1 .

b) Encontrar una relación de recurrencia entre I_n e I_{n+1} .

c) Mostrar que para todo entero $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

d) Se define una sucesión (u_n) para todo entero n : $I_n = \frac{n!}{e} (e - u_n)$.

d') Encontrar una relación de recurrencia entre u_n y u_{n+1} .

d'') Calcular u_0 y luego deducir la expresión de u_n en función de n .

e) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$.

5. Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ por: $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

Mostrar que F es derivable en $[0, +\infty)$ y luego calcular $F'(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

6. Se considera la función f definida en $[0, +\infty)$ por: $f(t) = \frac{t-1}{t \ln(t)}$ si $t \neq 1$ y $f(1) = 1$.

a) Mostrar que f es continua en $[0, +\infty)$.

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} f(t) dt$.

c) Deducir el valor del límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

7. Considere las siguientes integrales: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ y $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$.

Calcular $I + J$ e $I - J$ y luego deducir I y J .

8. Considere las siguientes integrales:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx \quad ; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

a) Calcular: $I - J$ e $I + J + K$.

b) Calcular $2 \sin^2(x) \cos^2(x)$ en función de $\sin^2(2x)$ y $\cos(4x)$.

c) Calcular K y luego deducir los valores de I y J .

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 6 & \text{si } x < 3, \\ x + \frac{9}{4} & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Verifique que f es continua en $x = 3$. Luego, calcule $\int_1^3 f(x) dx$.