PROBLEMAS CON MASAS VARIABLES

1. Una gota de agua de masa 0,1 gramos se deja caer desde cierta altura en un ambiente de vapor de agua. El vapor de agua se condensa en ella a razón constante de 0,001 g/s. Considerando en reposo el vapor, determine la rapidez de la gota al cabo de 10 s.

R: 93,55 m/s

$m_0 = 0.1\,g$

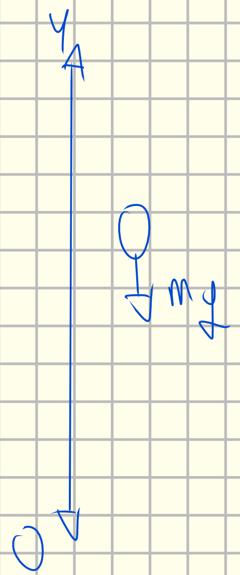
$\frac{dm}{dt} = 0.001\,g/s$

$dm = 0.001\,dt.$

$m(t) = 0.001t + C_1'$

$m(0) = C_1' = 0.1\,g$

$\therefore m(t) = 0.001t + 0.1\,[g]$ } Integramos.



$F_{ext} = \frac{dv}{dt} m - v_{rel}\frac{dm}{dt}$

con $v_{rel} = u - v$; y $u = 0. \Rightarrow v_{rel} = v.$

$F_{ext} = \frac{dv}{dt} m + v\frac{dm}{dt} = \frac{dp}{dt}.$

$\frac{d(mv)}{dt} = F_{ext} \Rightarrow d(mv) = F_{ext}\,dt.$

$m(t)v(t) = \int_0^t F_{ext}\,dt.$; $F_{ext} = P = -m(t)g$

$= -\int_0^t (0.001t + 0.1)g\,dt$

$= (-0.0005t^2 - 0.1t - C_1')g$

Despejamos $v(t)$.

$v(t) = -\frac{0.0005t^2 + 0.1t + C_1}{0.001t + 0.1}g$

En $v(0) = 0$; ya que parte del reposo

$v(0) = 0 = \frac{C_1}{0.1} \Rightarrow C_1 = 0$

$\therefore v(t) = -\frac{0.0005t^2 + 0.1t}{0.001t + 0.1}\cdot g$

$v(10) = -93.55\,m/s$

$|v(10)| = 93.55\,m/s$ //

2. Un cohete de lanzamiento vertical sube con una aceleración de $1{,}4\ m/s^2$. Si la velocidad relativa de los gases respecto del cohete es constante y de valor absoluto $800\ m/s$, determine la masa del cohete en función del tiempo si su masa inicial, incluido el combustible es de $4000\ kg$.

R: $4000e^{-0{,}014t}\ kg$

$a = 1.4\ m/s^2$

$v_{rel} = 800\ m/s$

$m(t) = ?$

$m_0 = 4000\ kg$

F → Interna

↳ Se representa con $v_{rel}\frac{dm}{dt}$.

mg

$$f_{ext} = \frac{dv}{dt}m - v_{rel}\frac{dm}{dt}$$

$$-m(t)g = m(t)a - v_{rel}\frac{dm}{dt}$$

$$-m(t)(g+a) = -v_{rel}\frac{dm}{dt}$$

$$dt = v_{rel}\frac{dm}{m(t)(g+a)}$$

$$t = \frac{v_{rel}}{g+a}\cdot(\ln(m) + C_1')$$

$$\ln(m) + C_1 = \frac{(g+a)t}{v_{rel}}$$

$$\ln(m) = \frac{(g+a)t}{v_{rel}} - C_1'$$

$$m(t) = e^{\frac{(g+a)t}{v_{rel}}}\cdot e^{-C_1'}$$

$$m(0) = 4000 = e^1\cdot e^{-C_1'} \Rightarrow e^{-C_1'} = 4000$$

$$m(t) = 4000\ e^{\frac{(g+a)}{v_{rel}}\cdot t} \quad ;\ g = 9.8\,m/s^2;\ a = 1.4\,m/s^2;\ v_{rel} = -800\ m/s$$

$$\therefore\ m(t) = 4000\ e^{-0.0014t}\ [kg]$$

3. La figura muestra un móvil de masa $1000\ kg$, inicialmente en reposo, que contiene además $200\ kg$ de combustible. Su motor quema el combustible a razón constante $10\ kg/s$. El móvil puede desplazarse sobre una superficie horizontal lisa. Si la velocidad relativa del móvil respecto de los gases quemados es de $20\ m/s$, determine la velocidad del móvil transcurridos $15\ s$.

R: 2,67 m/s

$m_c = 1000\ kg$

$v_0 = 0$

$m_6 = 200\ kg$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dm_6}{dt} = -10\ kg/s \\ v_{rel} = -20\ m/s\end{array}\right\} \Rightarrow m_6 = 200 - 10t \Rightarrow m(t) = \begin{cases} 1200 - 10t & ;\ 0 \le t \le 20 \\ 1000 & ;\ t > 20 \end{cases}$$

$F_{ext} = \frac{dv}{dt} \cdot m - v_{rel} \cdot \frac{dm}{dt}$; OBS, $F_{ext} = N - P = 0$

$\frac{dv}{dt} m(t) = v_{rel} \frac{dm}{dt}$

$dv = v_{rel} \frac{dm}{m(t)} = -20 \cdot \frac{dm}{1200-10t} \Rightarrow v(t) = 20 \ln(1200-10t) + C_1'$

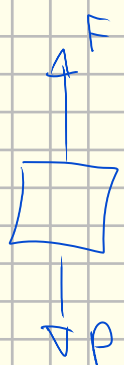
Como $v(0) = 0 = -20\ln(1200) + C_1' \Rightarrow C_1' = 20\ln(1200)$

$\therefore v(t) = 20\ln(1200) - 20\ln(1200-10t)$

$v(t) = 20 \ln\left(\frac{1200}{1200-10t}\right) \Rightarrow v(15) = 2{,}67 \ m/s$ //

4. Un balde de masa m_b está siendo tirado hacia arriba por una cuerda, la cual ejerce una fuerza de magnitud constante F. Inicialmente el balde contiene una masa m_0 de agua, pero pierde agua a razón constante de $A\ kg/s$, con velocidad nula respecto al balde, de modo que después de cierto tiempo, el balde queda vacío. ¿Cuál es la velocidad del balde justo cuando queda vacío?

R: $\frac{F}{A}\ln\left(\frac{m_0+m_b}{m_b}\right) - \frac{gm_0}{A}$



$\frac{dm_0}{dt} = -A \Rightarrow dm_0 = -A dt \Rightarrow m_0(t) = -\int A dt + C_1 \Rightarrow m_0(0) = m_0$

$\therefore m_0(t) = m_0 - At$, $m_0(t') = 0 = m_0 - At' \Rightarrow t' = m_0/A$.

$F_{ext} = \frac{dv}{dt} m - \cancel{v_{rel} \frac{dm}{dt}}^{\,0}$; $m(t) = m_b + m_0 - At$, $0 \leq t \leq m_0/A$

$F_{ext} = F - m(t)g = \frac{dv}{dt} m(t) \Rightarrow dv = \frac{F}{m(t)} \cdot dt - g\, dt$

Integramos: $v(m_0/A) = F \int_0^{m_0/A} \frac{dt}{m_b + m_0 - At} - g \cdot \frac{m_0}{A}$

$= \frac{F}{A}\left[\ln(m_b) - \ln(m_b + m_0)\right] - g \cdot \frac{m_0}{A}$

$\therefore v(m_0/A) = \frac{F}{A} \ln\left(\frac{m_b + m_0}{m_b}\right) - g\frac{m_0}{A}$ //

OBS, $v(t) = \frac{F}{A} \ln\left(\frac{m_b + m_0}{m_b + m_0 - At}\right) - gt$