# Daily Integral - Medium

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{4e^{2x} + (x^2 + 2x + 2)^2}}\, dx$$

***Solución.***

**Paso 1.-** Dado que se trata de una integral impropia de primera especie, comenzamos encontrando una primitiva del integrando.

$$I' = \int \frac{x^2}{\sqrt{4e^{2x} + (x^2 + 2x + 2)^2}}\, dx$$

**Paso 2.-** En el denominador multiplicamos por un uno inteligente de la forma $1 = \dfrac{2e^x}{2e^x}$. Así,

$$I' = \int \frac{x^2}{\frac{2e^x}{2e^x}\sqrt{4e^{2x} + (x^2 + 2x + 2)^2}}\, dx$$

**Paso 3.-** Ingresamos el factor $\dfrac{1}{2e^x}$ dentro de la raíz

$$I' = \int \frac{x^2}{2e^x\sqrt{\frac{1}{(2e^x)^2}\left(4e^{2x} + (x^2 + 2x + 2)^2\right)}}\, dx$$

$$I' = \int \frac{x^2}{2e^x\sqrt{\frac{4e^{2x}}{(2e^x)^2} + \frac{(x^2+2x+2)^2}{(2e^x)^2}}}\, dx$$

$$I' = \int \frac{x^2}{2e^x\sqrt{1 + \left(\frac{x^2+2x+2}{2e^x}\right)^2}}\, dx$$

**Paso 4.-** Realizamos el cambio de variable

$$b = \frac{x^2 + 2x + 2}{2e^x}$$

Derivando, se obtiene

$$b = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$db = \frac{1}{2}\left[(2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}\right] dx$$

$$db = \frac{1}{2}(2x + 2 - x^2 - 2x - 2)e^{-x} dx$$

$$db = -\frac{x^2}{2e^x}\, dx$$

**Paso 5.-** Sustituyendo en la integral

$$I' = -\int \frac{db}{\sqrt{1+b^2}}$$

**Paso 6.-** La integral anterior es inmediata, por lo tanto

$$I' = -\ln(b + \sqrt{1+b^2}) + C$$

**Paso 7.-** Regresando a la variable original $x$

$$I' = -\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{2e^x} + \sqrt{1 + \left(\frac{x^2+2x+2}{2e^x}\right)^2}\right) + C$$

**Paso 8.-** Evaluamos la integral impropia

$$I = \left[-\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{2e^x} + \sqrt{1 + \left(\frac{x^2+2x+2}{2e^x}\right)^2}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$I = \lim_{a\to+\infty}\left[-\ln\left(\frac{a^2+2a+2}{2e^a} + \sqrt{1 + \left(\frac{a^2+2a+2}{2e^a}\right)^2}\right)\right] + \ln\left(\frac{0^2+2\cdot 0+2}{2e^0} + \sqrt{1 + \left(\frac{0^2+2\cdot 0+2}{2e^0}\right)^2}\right)$$

**Paso 9.-** Analizando los extremos

Cuando $a \to +\infty$, entonces

$$\frac{a^2+2a+2}{2e^a} \to 0$$

por lo tanto,

$$\lim_{a\to+\infty}\ln\left(\frac{a^2+2a+2}{2e^a} + \sqrt{1 + \left(\frac{a^2+2a+2}{2e^a}\right)^2}\right) = \ln(1) = 0$$

Por otro lado, cuando $x = 0$, se obtiene

$$\ln\left(\frac{0^2+2\cdot 0+2}{2e^0} + \sqrt{1 + \left(\frac{0^2+2\cdot 0+2}{2e^0}\right)^2}\right) = \ln(1+\sqrt{2})$$

**Paso 10.-** Sustituyendo

$$I = [-0 + \ln(1+\sqrt{2})] = \ln(1+\sqrt{2})$$

**Paso 11.-** Finalmente, su valor aproximado es

$$I \approx 0.88137$$