Daily Integral - Easy

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x) - x\arctan(x)}{1 - x + x^2 - x^3}\,dx$$

Solución.

Paso 1.- Factorizamos el integrando

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x) - x\arctan(x)}{1 - x + x^2 - x^3}\,dx$$
$$I = \int_0^1 \frac{(1-x)\arctan(x)}{1 - x + x^2(1-x)}\,dx$$
$$I = \int_0^1 \frac{(1-x)\arctan(x)}{(1+x^2)(1-x)}\,dx$$

Paso 2.- Simplificando, se obtiene

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$$

Paso 3.- Realizamos el cambio de variable $b = \arctan(x)$, de donde $db = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Además, los límites de integración cambian: si $x \in [0, 1]$, entonces $b \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Por lo tanto,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} b\,db$$

Paso 4.- Integrando

$$I = \frac{b^2}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Paso 5.- Evaluando

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0^2\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

Paso 6.- Finalmente, su valor aproximado es

$$I \approx 0.30842$$