MECÁNICA NEWTONIANA
2020 A
HOJA DE TRABAJO 6
CINEMÁTICA 3

PREGUNTAS

1. Una partícula se mueve en el plano xy de acuerdo con las siguientes relaciones en función del tiempo $t : x = ae^{-bt}\cos(bt)$ y $y = ae^{-bt}\text{sen}(bt)$, donde a y b son constantes positivas, la componente radial de la velocidad es:
   a) ae^{-bt}
   b) be^{-bt}
   c) bt
   d) $-br$
   e) br

$x = a e^{-bt}\cos(bt)$ $\quad y = a e^{-bt}\text{sen}(bt).$

$\frac{x}{a} e^{bt} = \cos(bt)$ $\quad \frac{y}{a} e^{bt} = \text{sen}(bt)$

$\frac{x^2}{a^2} e^{2bt} = \cos^2(bt)$ $\quad \frac{y^2}{a^2} e^{2bt} = \text{sen}^2(bt)$

Sumamos

$\frac{x^2}{a^2} e^{2bt} + \frac{y^2}{a^2} e^{2bt} = 1$

$\frac{e^{2bt}}{a^2}(x^2+y^2) = 1$

$\frac{e^{2bt}}{a^2} r^2 = 1 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{a^2}{e^{2bt}}} = \frac{a}{e^{bt}} = ae^{-bt}$

$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = v = a\cdot -b\cdot e^{-bt}$
$= -abe^{-bt}$ //

$\dot{r} = -rb$ //
$v = -br$ //

2. Si el vector posición de una partícula con respecto a un punto fijo es constante en magnitud y variable en dirección, entonces es correcto afirmar que:
   a) la componente radial de la velocidad es cero //
   a) la componente transversal de la velocidad es cero
   b) la componente radial de la aceleración es cero
   c) la componente transversal de la aceleración es cero
   d) la velocidad y la aceleración son nulas

Si $r = cte \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0$

3. Una partícula describe una trayectoria plana, de tal manera que $r = 5(1 + cos\theta)$ m, si la velocidad angular del vector posición de la partícula es constante e igual a 2 rad/s. Para $\theta = \frac{\pi}{3}$, la aceleración de la partícula en m/s², es:
   a) $-8.66\,\overrightarrow{u_r} + 15\,\overrightarrow{u_\theta}$
   b) $8.66\,\overrightarrow{u_r} + 15\,\overrightarrow{u_\theta}$
   c) $-34.64\,\overrightarrow{u_r} - 40\,\overrightarrow{u_\theta}$
   d) $-40\,\overrightarrow{u_r} + 15\,\overrightarrow{u_\theta}$
   e) $-40\,\overrightarrow{u_r} - 34.64\,\overrightarrow{u_\theta}$

$\vec{r} = r\,\vec{u_r}$

$\dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{r}\,\vec{u_r}}_{\vec{v_r}} + \underbrace{r\cdot\dot{\vec{u_r}}}_{\vec{v_\theta}}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\,\dot{\vec{u_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\vec{u_\theta}}$

$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + [\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\vec{u_\theta}$

$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$; $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$r(\pi/3) = 7.5$ m

$\dot{r} = -5\,\text{sen}(\pi/3)\cdot 2 = -8.66$ m/s

$\ddot{r} = -5\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - 5\,\text{sen}(\theta)\ddot{\theta}$ $\quad \ddot{\theta} \to 0 \quad \dot{\theta} = cte$

$\ddot{r} = -5\cos(\pi/3)\cdot 4 = -10$ m/s²

$a_r = -10 - 7.5\cdot 2^2 = -40$ m/s²

$a_\theta = 7.5\cdot 0 + 2\cdot -8.66\cdot 2$

$a_\theta = -34.64$ m/s².

$\vec{a} = -40\vec{u_r} - 34.64\vec{u_\theta}$ m/s²

4. El vector posición con respecto a un punto fijo O, de una partícula que se mueve en un plano está dado por $\vec{r} = r\overrightarrow{u_r}$, si para todo instante su velocidad es $\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$, es correcto afirmar que la partícula:
   a) describe una trayectoria rectilínea X
   b) describe una trayectoria parabólica X
   c) describe una trayectoria circular
   d) tiene aceleración radial igual a cero X
   e) tiene aceleración transversal igual a cero X

$\vec{V} = \vec{V_\theta} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{V_r} = 0$

$\Rightarrow$ Circunferencia

5. En cierto instante una partícula tiene una velocidad $\vec{v} = 3\overrightarrow{u_r} + 4\overrightarrow{u_\theta}$ m/s y una aceleración $\vec{a} = -\overrightarrow{u_r} + 2\overrightarrow{u_\theta}$ m/s², la magnitud del radio de curvatura en dicho instante en metros es:
   a) 2.5
   b) 5.0
   c) 10.0
   d) 12.5
   e) 25.0

$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$; $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 \Rightarrow v = 5$ m/s ; $a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}$ m/s² ; $a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{(-1\cdot 3) + (4\cdot 2)}{5} = 1$

$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \sqrt{4} = 2$ m/s²

$\therefore a_N = 2$ m/s²

$\rho = \frac{(5\text{ m/s})^2}{2\text{ m/s}^2} = 12.5$ m //

6. Una partícula describe un movimiento con rapidez constante. En todo instante se cumple que:
   a) $0 = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$
   b) $0 = r\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$
   c) $0 = \dot{r} + r\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}$
   d) $0 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$
   e) $0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ y $0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv^2}{dt} = 0$

$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$\frac{d(\dot{r}^2)}{dt} = 2\dot{r}\cdot\ddot{r}$

$d(r^2\cdot\dot{\theta}^2) = 2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\cdot 2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta}$
$= 2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$

$\therefore 0 = 2\dot{r}\ddot{r} + 2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$

$0 = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$

7. Una partícula se mueve de tal manera que su radio vector con respecto a un punto fijo O disminuye uniformemente en el transcurso del tiempo, es correcto afirmar que:
   a) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_\theta} = cte = 0$
   b) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_\theta} = cte < 0$
   c) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_r} = cte = 0$
   d) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_r} = cte < 0$
   e) $\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_r} \neq cte$

$\vec{V}\cdot\vec{U_r} = V_r$

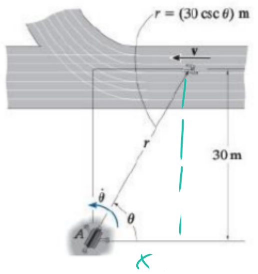
Si disminuye $\Rightarrow V_r < 0$

8. En el instante en el que $\theta = 45°$, el atleta está corriendo con una rapidez constante v de 2 m/s. La velocidad angular $\dot{\theta}$, con la que la cámara A, debe girar para seguir el movimiento en rad/s, es:
   a) $^1/_{30}$
   b) $^2/_{30}$
   c) $^3/_{30}$
   d) $\sqrt{2}$
   e) *no se puede determinar*

$\cot(\theta) = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30\cot(\theta)$

$-v = 30\cdot -\csc^2(\theta)\,\dot{\theta}$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{30}\,sen^2(\theta) = \frac{1}{30}$ rad/s



PROBLEMAS

COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

1. Dado que: $\vec{v} = v\vec{u}_T$, $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$, calcule $\vec{v}\times\vec{a}$ y utilice este resultado para demostrar que: $\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$

$\vec{v}\times\vec{a} = v\vec{u_T} \times \left(\dot{v}\vec{u_T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{u_N}\right)$

$= (v\cdot\dot{v})\,\overbrace{(\vec{u_T}\times\vec{u_T})}^{0} + \left(v\cdot\frac{v^2}{\rho}\right)(\vec{u_T}\times\vec{u_N})$

$\vec{v}\times\vec{a} = \frac{v^3}{\rho}\vec{u_B}$, $\vec{u_B}$: unitario binormal

$|\vec{v}\times\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^3}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$ //

2. Las coordenadas de un cuerpo en movimiento están dadas por: $x(t)\frac{1}{3}mt^3, y = 7 - \frac{1}{2}mt^2, z = mt$. Determine: a) el vector unitario tangencial y normal en función de t, b) la magnitud del radio de curvatura en función de t.

$x(t) = \frac{1}{3}mt^3 \Rightarrow v_x(t) = mt^2 \Rightarrow a_x = 2mt$

$y(t) = 7 - \frac{1}{2}mt^2 \Rightarrow v_y(t) = -mt \Rightarrow a_y = -m$

$z(t) = mt \Rightarrow v_z(t) = m \Rightarrow a_z = 0$

$\vec{v}(t) = mt^2\vec{i} - mt\vec{j} + m\vec{k}$; $|\vec{V}| = m\sqrt{t^4+t^2+1} = md$

$\vec{a}(t) = 2mt\vec{i} - m\vec{j}$; $|\vec{a}| = m\sqrt{4t^2-1} = md'$

(a) $\vec{U_T} = \dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \dfrac{m(t^2\vec{i} - t\vec{j} + \vec{k})}{md} \quad \dfrac{t^2\vec{i} - t\vec{j} + \vec{k}}{d}$ //

T N B

$\vec{V} \times \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{V} \times (\vec{a_T} + \vec{a_N}) = \vec{b}$

$\cancel{\vec{V} \times \vec{a_T}}^{\,0} + \vec{V} \times \vec{a_N} = \vec{b}$

$\therefore \vec{V} \times \vec{a} = \vec{V} \times \vec{a_N} = \vec{b}$

$\vec{V} \times \vec{a} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ mt^2 & -mt & m \\ 2mt & -m & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ mt^2 & -mt \\ 2mt & -m \end{matrix}$

$\vec{b} = m^2\vec{i} + 2m^2t + m^2t^2\vec{k} \quad , \; m^2\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}$

$\vec{b} \times \vec{V} = \vec{V_N}$

$\vec{b} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m^2 & 2m^2 & m^2t^2 \\ mt^2 & -mt & m \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ m^2 & 2m^2 \\ mt^2 & -mt \end{matrix}$

$\vec{V_N} = (2m^3 + m^3t^3)\vec{i} + (m^3t^2 - m^3)\vec{j} + (-m^3t - 2m^3t^2)\vec{k}$

OBS $|V_N| = b \times V = |b| \cdot |v| \operatorname{sen}(\cancel{90°})^{1} = |b| \cdot |v|$

$|\vec{V_N}| = m^2\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$

$\vec{U_N} = \dfrac{\vec{V_N}}{|\vec{V_N}|} = \dfrac{m^3\,(t^3+2)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} - (2t^2+t)\vec{k}}{(m^2\sqrt{t^4+4t^2+1}) \cdot (m\sqrt{t^4+t^2+1})}$

$\vec{U_N} = \dfrac{(t^3+2)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} - (2t^2+t)\vec{k}}{\sqrt{t^4+4t^2+1}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}$ //

(b) $a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{v^2}{a_N}$

$\vec{v} \times \vec{a_N} = |\vec{v}| \cdot |\vec{a_N}| \cdot \operatorname{sen}(\cancel{90°})^{1}$

$\dfrac{\vec{v} \times \vec{a_N}}{|\vec{v}|} = \dfrac{|\vec{v}| \cdot |\vec{a_N}|}{|\vec{v}|} = |\vec{a_N}|$

$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times \vec{a_N} = \vec{b}$

$\therefore |a_N| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{m^2\sqrt{1+4t^2+t^4}}{m\sqrt{t^4+t^2+1}} = m\sqrt{\dfrac{t^4+4t^2+1}{t^4+t^2+1}}$

$\rho(t) = \dfrac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a_N}|} = m^2(t^4+t^2+1) \cdot \dfrac{1}{m} \cdot \sqrt{\dfrac{t^4+t^2+1}{t^4+4t^2+1}}$

$\rho(t) = m(t^4+t^2+1)^{3/2}(t^4+4t^2+1)^{-1/2}$ //

3. Una partícula se mueve en el espacio con una velocidad dada por: $\vec{v} = e^t\vec{\imath} + mt^2\vec{\jmath} - \frac{1}{3}t^3\vec{k}$ m/s, siendo m una constante. Calcule la magnitud del radio de curvatura de la trayectoria en $t = 0$ s. R: $\rho = \infty$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N} \quad ; \quad \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$$

$$a^2 = a_N^2 + a_T^2$$

$$a_T = \dot{v}$$

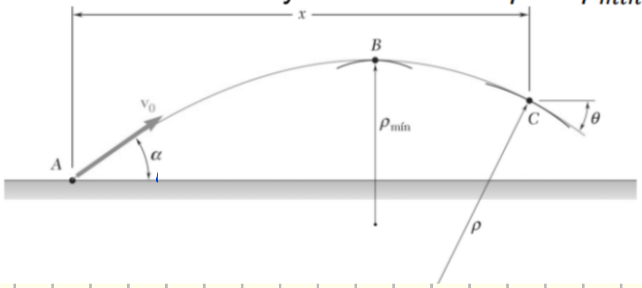
$$\vec{v} = e^t\,\vec{i} + mt^2\,\vec{j} - \frac{1}{3}t^3\,\vec{k} \quad , \quad v = \sqrt{e^{2t} + m^2t^4 + \frac{1}{9}t^6}$$

$$\vec{a} = e^t\,\vec{i} + 2mt\,\vec{j} - t^2\,\vec{k} \quad , \quad a = \sqrt{e^{2t} + 4m^2t^2 - t^4}$$

$$\vec{v}(0) = 1\,\vec{i}$$
$$\vec{a}(0) = 1\,\vec{i}$$
$$\Rightarrow \vec{v}(0) \parallel \vec{a}(0) \Rightarrow \vec{a}(0) = \vec{a}_T(0) \Rightarrow a_N(0) = 0$$

$$\rho(0) = \frac{v^2}{a_N} = \frac{1^2}{0} = \infty \;//$$

4. Se dispara un proyectil desde el punto A con una velocidad inicial $\vec{v_0}$. a) Muestre que el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil alcanza su valor mínimo en el punto más alto de la trayectoria B. b) Si se denota mediante θ el ángulo formado por la velocidad y la horizontal en el punto dado C, demuestre que el radio de curvatura de la trayectoria en C es $\rho = \rho_{min}/\cos^3\theta$.



(a) $\vec{v}(t) = V_{0x}\,\vec{i} + (V_{0y} - gt)\,\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = (V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2)^{1/2}$

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{a}_N| \Rightarrow |\vec{a}_N| = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\vec{j}$$

$$\rho(t) = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_N|} = \frac{(V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2)^{3/2}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_{0x} & (V_{0y} - gt) & 0 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix} = -V_{0x}\,g\,\vec{k} \Rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = V_{0x}\,g$$

$$\rho(t) = \frac{(V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2)^{3/2}}{V_{0x}\,g}$$

$$f(t) = (V_{0y} - gt)^2 \Rightarrow f'(t) = 2(V_{0y} - gt)(-g)$$

$$f'(t') = 0 = -2g(V_{0y} - gt') \Rightarrow t' = V_{0y}/g$$

$$f''(t) = 2g^2 \Rightarrow f''(t') = 2g^2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{mínimo}}$$

$t_{hmax} = t' = V_{oy}/g \Rightarrow \rho(t') = \rho_{min} = \frac{V_{ox}^2}{g}$ //

(b) $V_x = V\cos(\theta) \Rightarrow V = V_x/\cos(\theta)$

$a_N = g\cos(\theta)$

$\rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V_x^2}{\cos^2(\theta)} \cdot \frac{1}{g\cos(\theta)} = \frac{V_x^2}{g\cos^3(\theta)} = \frac{\rho_{min}}{\cos^3(\theta)}$ //

5. Una partícula se mueve sobre la curva dada por $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + e^{2t}\vec{\jmath}$ m. a) Use el resultado del problema 1 para calcular la magnitud del radio de curvatura ρ en el punto $(0,1)$ m. b) Halle la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$, y utilice la ecuación: $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ para calcular ρ en el punto (0,1) m y compare con el resultado en a). R: a) $\rho = 2.8$ m, b) $y = e^{2x}$

$\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$

$\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + e^{2t}\vec{\jmath}$

$\vec{v}(t) = \vec{\imath} + 2e^{2t}\vec{\jmath} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1+4e^{4t}}$

$\vec{a}(t) = 4e^{2t}\vec{\jmath}$

(a) $\vec{v} \times \vec{a} = \det \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 1 & 2e^{2t} \\ 0 & 4e^{2t} \end{matrix} = 4e^{2t}\vec{k}$

$\Rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = 4e^{2t}$

$(0;1) = \vec{r}(t') \Rightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ e^{2t'} = 0 \end{cases} \Rightarrow t' = 0$

$\rho(t) = \frac{(1+4e^{4t})^{3/2}}{4e^{2t}} \Rightarrow \rho(0) = 2.80$ m //

(b) $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + e^{2t}\vec{\jmath}$

$x = t \wedge y = e^{2t}$

$f(x) = y = e^{2x}$ $\qquad \rho = \frac{(1+4e^{4x})^{3/2}}{4e^{2x}} = 2.80$ m //

$y' = 2e^{2x}$

$y'' = 4e^{2x}$

6. La componente tangencial de la aceleración de una partícula con movimiento curvilíneo está dada por $a_T = 3t^2 - 2t + 1$ m/s². Si parte del reposo y al instante $t = 2$ s la aceleración tiene una magnitud de 15 m/s², determine la magnitud del radio de curvatura en ese instante. R: $\rho = 3$ m

$a(2) = 15$ m/s²

$a_T(2) = 9$ m/s²

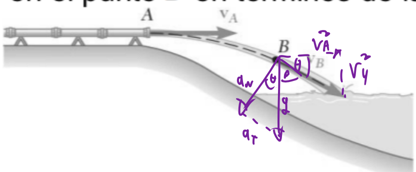
$a_N = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ m/s²

$$a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_T\,dt \Rightarrow v(t) = 3\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} + t + \cancel{v_1}^{0}$$
$$= t^3 - t^2 + t$$

$$v(2) = 2^3 - 2^2 + 2 = 6 \text{ m/s}$$

$$\rho(2) = \frac{6^2}{12} = 3 \text{ m} \,//$$

7. Un tubo horizontal descarga desde el punto A un chorro de agua en un estanque. Exprese la magnitud del radio de curvatura del chorro en el punto B en términos de las magnitudes de las velocidades de $\vec{v_A}$ y de $\vec{v_B}$.



R: $\rho = \frac{v_B^3}{g v_A}$

$$\rho = \frac{v^2}{a_N}$$

$\cos(\theta) = a_N/g \Rightarrow a_N = g\cos(\theta)$; $\cos(\theta) = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow V_B = \frac{V_A}{\cos(\theta)}$

$$\rho_B = \frac{(V_B)^2}{g\cos(\theta)} \quad \frac{V_B^2}{g \cdot V_A/V_B} = \frac{V_B^3}{g V_A} \,//$$

8. Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración para una partícula que se mueve de acuerdo a la ecuación $\vec{r} = t^3\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\,\vec{\jmath}$ m.

$$\vec{r} = t^3\,\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\,\vec{j}\ [m]$$

$$\vec{v} = 3t^2\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\ [m/s] \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{9t^4 + \cos^2(t)}$$

$$\vec{a} = 6t\,\vec{i} - \operatorname{sen}(t)\,\vec{j}\ [m/s^2]$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times (\vec{a_T} + \vec{a_N}) = \cancel{\vec{v} \times \vec{a_T}}^{0} + \vec{v} \times \vec{a_N}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times \vec{a_N} = |\vec{v}| \cdot |\vec{a_N}| \quad ; \quad \text{obs: } \vec{v} \perp \vec{a_N}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & \cos(t) & 0 \\ 6t & -\operatorname{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} = (-3t^2\operatorname{sen}(t) - 6t\cos(t))\,\vec{k}$$

$$a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \frac{+3t^2\operatorname{sen}(t) + 6t\cos(t)}{\sqrt{9t^4 + \cos^2(t)}} \,//$$

$$|\vec{v} \cdot \vec{a}| = |\vec{v} \cdot \vec{a_T}| + |\vec{v} \cdot \vec{a_N}| = (|\vec{v}| \cdot |\vec{a_T}| \cdot \cancel{\cos(0)}^{1}) + (|\vec{v}| \cdot |\vec{a_N}| \cdot \cancel{\cos(90°)}^{0})$$

$$|\vec{v} \cdot \vec{a}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{a_T}|$$

$$\Rightarrow |\vec{a_T}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{a}|}{|\vec{v}|}$$

$$|\vec{v} \cdot \vec{a}| = (3t^2 \cdot 6t) + (\cos(t) \cdot -\operatorname{sen}(t))$$
$$= 18t^3 - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

$$|\vec{a_T}| = \frac{18t^3 - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{9t^4 + \cos^2(\theta)}} \,//$$

9. Una partícula se mueve por la trayectoria $y = x^2 - x - 6$ m, de izquierda a derecha, con rapidez constante igual a 10 m/s. Determine para $x = 2$ m, a) la velocidad y la aceleración en componentes tangencial y normal, b) el radio de curvatura. R: $\vec{v} = 10\overrightarrow{u_T}$ m/s, $\vec{a} = 6.32\overrightarrow{u_N}$ m/s², $\vec{\rho} = -15.81\overrightarrow{u_N}$

(a) $\vec{V} = 10\,\vec{u_T}$ m/s

$\vec{a_T} = \frac{dv}{dt}\vec{u_T} = 0$

$\vec{a_N} = \frac{V^2}{\rho}\vec{u_N}$

$\vec{a_N} = \frac{10^2}{15.81}$

$\vec{a_N} = 6.32$ m/s² $\vec{u_N}$

(b) $y = x^2 - x - 6$

$y' = 2x - 1$

$y'(2) = 3$ m/s

$y'' = 2$ m/s²

$y''(2) = 2$ m/s²

$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$

$\rho = \frac{(1 + 3^2)^{3/2}}{2}$

$\rho = 15.81$ [m]

$\vec{\rho} = -\rho\,\vec{u_N}$

$\vec{\rho} = -15.81\,\vec{u_N}$ [m]

10. Una partícula se mueve en el plano xy de izquierda a derecha, de modo que $s = t^3 + t^2 + 5$ m, donde el tiempo t está dado en segundos. Si para $t = 2$ s, su radio de curvatura es $\vec{\rho} = -12\vec{\imath} - 9\vec{\jmath}$ m, en ese instante, determine: a) la velocidad y la aceleración en componentes rectangulares, b) la velocidad y la aceleración en componentes tangencial y normal, c) la rapidez angular del radio de curvatura.

R: a) $\vec{v} = 9.6\vec{\imath} - 12.8\vec{\jmath}$ m/s, $\vec{a} = 22.06\vec{\imath} - 0.96\vec{\jmath}$ m/s², b) $\vec{v} = 16\overrightarrow{u_T}$ m/s, $\vec{a} = 14\overrightarrow{u_T} + 17.07\overrightarrow{u_N}$ m/s², c) 1.07 rad/s

(b) $\vec{V}$ y $\vec{a}$ en componentes tangencial y normal

$s(t) = t^3 + t^2 + 5$

$v(t) = 3t^2 + 2t$

$v(2) = 16$ m/s

$a_T(t) = 6t + 2$

$a_T(2) = 14$ m/s²

$a_N(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)}$

$a_N(2) = \frac{16^2}{15} \approx 17.07$ m/s²

$\therefore \vec{V} = 16\,\vec{u_T}$ m/s

$\vec{a} = 14\,\vec{u_T} + 17.07\,\vec{u_N}$ m/s² //

(a) $\vec{\rho} = -\rho\,\vec{u_N}$

$\Rightarrow \vec{u_N} = -\frac{\vec{\rho}}{\rho} = 0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}$

$\vec{u_T} \cdot \vec{u_N} = 0$

$(u_{Tx} \cdot 0.8) + (u_{Ty} \cdot 0.6) = 0$

$\vec{u_{T_1}} = 0.6\vec{i} - 0.8\vec{j}$

v

$\vec{u_{T_2}} = -0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}$

Como se mueve de izquierda a derecha tomamos $\vec{u_{T_1}}$

$\vec{a} = 14(0.6\vec{i} - 0.8\vec{j}) + 17.07(0.8\vec{i} + 0.6\vec{j})$

$\vec{a} = 22.06\vec{i} - 0.96\vec{j}$ m/s² /

(c) $a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\vec{w} \times \vec{\rho})^2}{\rho}$, como $\vec{w} \perp \vec{\rho} \Rightarrow a_N = w^2 \cdot \rho \Rightarrow w = \sqrt{\frac{a_N}{\rho}}$

$w(2) = \sqrt{\frac{17.07}{15}} \approx 1.07$ rad/s

11. Una partícula se mueve en el plano xy, por la trayectoria $y = 15\ln\frac{x}{80}$, donde x y y están en m, de izquierda a derecha, cuando pasa por el punto $P(80, 0)$ m, su rapidez es 120 m/s, y disminuye a razón de 40 m/s^2. Al pasar por P, determine: a) La componente normal de la aceleración de la partícula. b) Las componentes rectangulares de la aceleración de la partícula. R: a) 32.04 m/s^2, b) $-33.41\,\vec{\imath} - 38.47\vec{\jmath}$ m/s^2

(a) $y = 15 \ln\left(\frac{x}{80}\right)$

$y' = 15 \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{80}{x}$

$y' = \frac{15}{x} \Rightarrow y' = \frac{15}{80} = 0.1875$

$y'' = -\frac{15}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{15}{80^2} \approx -0.002$

OBS: Usar en fracción

$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

$\rho \approx 449.36\ [m]$

$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{120^2}{449.36} \approx 32.05\ m/s^2$ //

$\vec{a_N} = 32.05\,\vec{u_N}\ [m/s^2]$ //

(b) $\vec{a_T} = -40\,\vec{u_T}\ [m/s^2]$

$\vec{a} = -40\,\vec{u_T} + 32.05\,\vec{u_N}\ [m/s^2]$

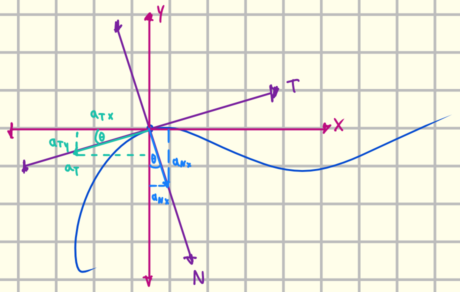
$y' = \tan(\theta) = 0.1875$

$\Rightarrow \theta = 10.62°$

$\vec{a_T} = -39.31\,\vec{i} - 7.37\,\vec{j}\ [m/s^2]$

$\vec{a_N} = 5.91\,\vec{i} - 31.50\,\vec{j}\ [m/s^2]$

$\vec{a} = -33.40\,\vec{i} - 38.87\,\vec{j}\ [m/s^2]$ //



OBS: La curva es concava hacia abajo porque y'' es negativa

COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

12. En un instante dado, una partícula tiene la siguiente posición, velocidad y aceleración relativos a un sistema de coordenadas xy, $x = 4$ m, $y = 2$ m, $\dot{x} = 2\sqrt{3}$ m/s, $\dot{y} = -2$ m/s, $\ddot{x} = -5$ m/s^2, $\ddot{y} = 5$ m/s^2. Determine $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, r, \dot{r}, \ddot{r}$. R: $r = 4.47$ m, $\dot{r} = 2.20$ m/s, $\ddot{r} = 0.255$ m/s^2, $\theta = 0.464$ rad, $\dot{\theta} = -0.746$ rad/s, $\ddot{\theta} = 2.236$ rad/s^2

$\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.57° = 0.4636$ rad //

$r = 2\sqrt{5} = 4.47$ m //

$r^2 = x^2 + y^2$

$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$

$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = 2.20$ m/s //

$v_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r}$

$v_\theta = -\sqrt{v - v_r} \approx -3.34$

$\dot{\theta} = \frac{-3.34}{2\sqrt{5}} \approx -0.7468$ rad/s //

$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$, $a = 5\sqrt{2}\ m/s^2$

$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = \dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}$

$\ddot{r} = \dfrac{\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} - \dot{r}^2}{r} = 0.2594\ m/s^2$ //

$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \sqrt{a^2 - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2}$

$\ddot{\theta} = \dfrac{\sqrt{a^2 - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2} - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = 2.2349\ rad/s^2$ //

13. Una partícula se mueve por la trayectoria $y = x^2 - x - 6$ m, de izquierda a derecha, con rapidez constante de 10 m/s. Determine para $x = 2$ m; la posición, la velocidad y la aceleración en componentes radial-transversal. R: $\vec{r} = \sqrt{20}\,\vec{u_r}$ m, $\vec{v} = -7.07\vec{u_r} + 7.07\vec{u_\theta}$ m/s, $\vec{a} = -4.69\vec{u_r} - 4.69\vec{u_\theta}$ m/s²

$y = x^2 - x - 6$

$y(2) = -4$

$\vec{r} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ [m]

$\vec{r} = 2\sqrt{5}$ [m] //

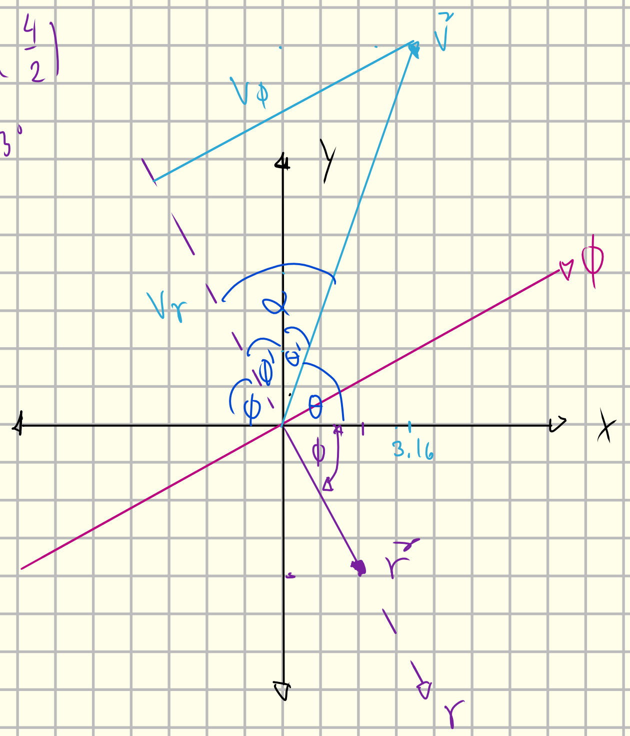
$y' = 2x - 1 = \tan(\theta)$

$y'(2) = 3 = \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(3)$

$\theta = 71.57°$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)$

$\phi = 63.43°$



$\vec{v} = 10;\ 71.57°$

$V_x = 10\cos(71.57°) = 3.16$ m/s

$V_y = 10\operatorname{sen}(71.57°) = 9.49$ m/s

$\alpha = \phi' + \theta' = 45°$

$V_r = V_\phi = 10\operatorname{sen}(45°) = 10\sqrt{5}$ m/s

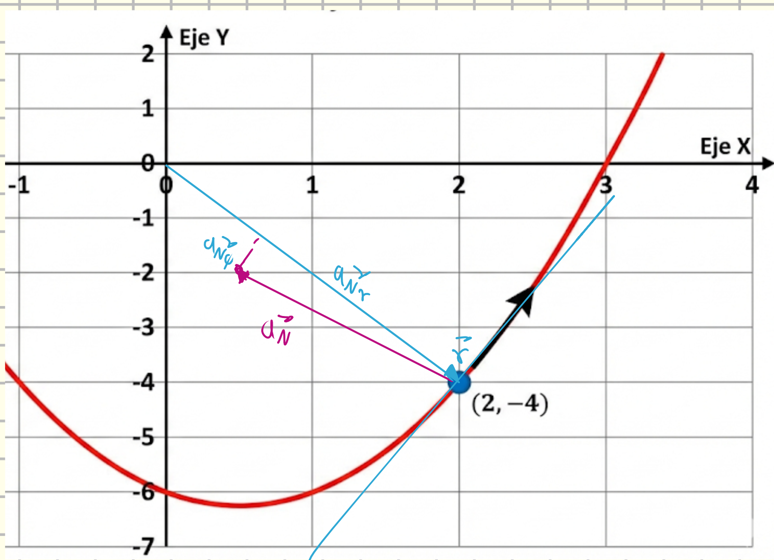
$\vec{V} = -5\sqrt{2}\,\vec{u_r} + 5\sqrt{2}\,\vec{u_\theta}$ [m/s] //

OBS, $\vec{a} = \vec{a_N}$

$y'' = 2$

$\rho = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \approx 15.81$ [m]

$a_N = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{10^2}{15.81} \approx 6.33$ [m/s²]



OBS, $V \perp a_N$

$\Rightarrow V \cdot a_N = 0$

$(-5\sqrt{2} \cdot a_{Nr}) + (5\sqrt{2} \cdot a_{N\phi}) = 0 \Rightarrow a_{Nr} = a_{N\phi}$

DEM, Signos (−) (−)

$V \perp a$

$\theta = 71.58° \Rightarrow \alpha = 161.58°$

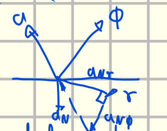
$a_N^2 = a_{Nr}^2 + a_{N\phi}^2 = 2a_{Nr}^2$

$\Rightarrow a_{Nr} = \pm\sqrt{\frac{a_N^2}{2}} = \pm 4.48$ [m/s²]

$\vec{a} = -4.48\,\vec{u}_r - 4.48\,\vec{u}_\phi$ [m/s²]

OBS, Vease el gráfico, para ver los signos.

donde α: Ángulo de a



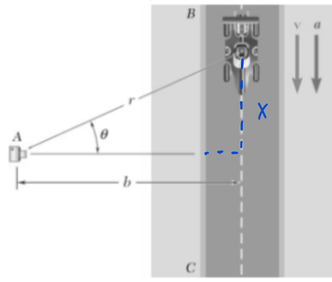
$\phi = -63{,}43°$

$\omega = 26{,}57°$; ω: Ángulo del unitario transversal

$a_r = a\cos(161{,}58° + 63{,}43°) = -$

$a_\theta = a\cos(161{,}58° - 26{,}57°) = -$

14. Para estudiar el desempeño de un automóvil de carreras, una cámara de movimiento a alta velocidad se ubica en el punto A y se monta sobre un mecanismo que permite registrar el movimiento del automóvil cuando éste se desplaza en el tramo recto BC. Determine la rapidez del automóvil en términos de b, θ y $\dot{\theta}$. R: $v = b\dot{\theta}\sec^2\theta$



$\tan(\theta) = x/b \Rightarrow x = b\tan(\theta)$

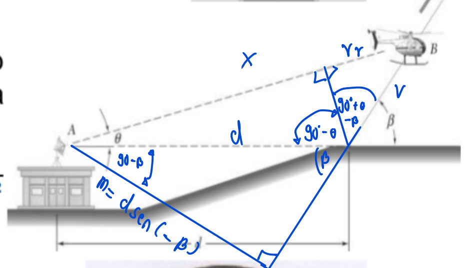
$V_x = b \cdot \sec^2(\theta)\,\dot{\theta}$

$V = V_x = b\,\dot{\theta}\sec^2(\theta)$

términos de b, θ y $\dot{\theta}$. R: $v = b\dot{\theta}\sec^2\theta$

15. Después de despegar, un helicóptero asciende en línea recta en un ángulo constante β. Un radar sigue su vuelo desde el punto A, como se indica en la figura. Determine la rapidez del helicóptero en términos de d, β, θ, $\dot{\theta}$.

R: $v = d\dot{\theta}\frac{\sin\beta}{(\mathrm{sen}(\beta-\theta))^2}$



$\cos(90-\beta) = m/d \Rightarrow m = d\cos(90-\beta)$

$m = d\,\mathrm{sen}(-\beta)$

$\cos(\theta + 90 - \beta) = \mathrm{sen}(\theta - \beta) = \frac{d\,\mathrm{sen}(-\beta)}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{d\,\mathrm{sen}(-\beta)}{\mathrm{sen}(\theta-\beta)} = \frac{d\,\mathrm{sen}(\beta)}{\mathrm{sen}(\beta-\theta)}$

$V_r = \dot{x} = \frac{d\,\mathrm{sen}(\beta)\cdot -\dot{\theta}\cdot\cos(\beta-\theta)}{(\mathrm{sen}(\beta-\theta))^2}$

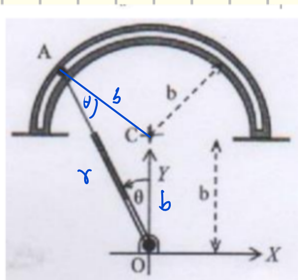
$\mathrm{sen}(90 + \theta - \beta) = -\cos(\beta - \theta) = \frac{V_r}{V}$

$\Rightarrow V = -\frac{V_r}{\cos(\beta-\theta)}$

$V = \frac{d\,\mathrm{sen}(\beta)\cdot \cancel{-}\,\dot{\theta}\,\cancel{\cos(\beta-\theta)}}{(\mathrm{sen}(\beta-\theta))^2\cdot\cancel{\cos(\beta-\theta)}}$

$\therefore V = \frac{d\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\beta)}{(\mathrm{sen}(\beta-\theta))^2}$ //

16. El movimiento del rodillo A por la ranura circular fija, está gobernado por el brazo OA, cuya parte superior desliza libremente en la parte inferior para acomodarse a la variación de la distancia OA. En la posición mostrada, el brazo tiene una velocidad angular de 5 rad/s en sentido horario y va disminuyendo a razón de 2 rad/s en cada segundo. Dado que $\theta = 30°$ y $b = 0.5$ m, determine la magnitud de la velocidad y la magnitud de la aceleración en A. R: $v = 5$ m/s, $a = 50.04$ m/s²



$x^2 + (y-b)^2 = b^2$

$x^2 + y^2 - 2yb + \cancel{b^2} = \cancel{b^2}$

$x^2 + y^2 - 2yb = 0$

$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\cdot\dot{\theta}^2$

$x^2 + y^2 = r^2$, $y = r\,sen(\theta)$

$r^2 = 2r\,sen(\theta)\,b$

$r = 2b\,sen(\theta)$

$r = 2\cdot 0.5\cdot sen(120°) = \sqrt{3}/2$ [m]

$\dot r = 2b\dot\theta\cos(\theta)$

$\dot r = 2\cdot 0.5\cdot(-5)\cdot -1/2$

$\dot r = 5/2$ [m/s]

$\vec v = \vec{v_r} + \vec{v_\theta}$

$\vec v = \dot r\,\vec{u_r} + r\dot\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec a = \ddot r\,u_r + \dot r\dot\theta\,\vec{u_\theta} + \dot r\dot\theta\,\vec{u_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{u_\theta} - r\dot\theta^2\,\vec{u_r}$

$\vec a = (\underbrace{\ddot r - r\dot\theta^2}_{a_r})\vec{u_r} + (\underbrace{2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta}_{a_\theta})\vec{u_\theta}$

$\dot r = 2b\dot\theta\cos(\theta)$

$\ddot r = 2b(\ddot\theta\cos(\theta) - \dot\theta^2 sen(\theta))$

$\ddot r = \cancel{2}\cdot 0.5(2\cdot\cos(120°) - (-5)^2 sen(120°))$

$\ddot r = -22.65$ [m/s²]

$v = \sqrt{(5/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2(-5)^2}$

$v = 5$ [m/s] //

$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$

$a_r = -22.65 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-5)^2$

$a_r = -44.30$ [m/s²]

$a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta$

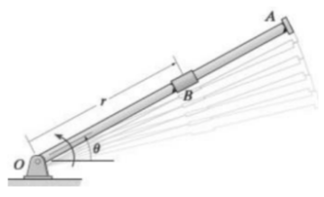
$a_\theta = \cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}\cdot -5 + \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$

$a_\theta = -23.26$ [m/s²]

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

$a = 50.04$ [m/s²] //

17. La rotación del brazo OA de 0.9 m alrededor de O se define mediante la relación $\theta = 0.15t^2$ rad, donde t es el tiempo y está en segundos. El collarín B desliza a lo largo del brazo de modo que su distancia desde O es $r = 0.90 - 0.12t^2$ m, donde t es el tiempo y está en segundos. Cuando el brazo OA forma un ángulo de 30°, con la horizontal, determine las componentes, radial y transversal de la velocidad y de la aceleración del collarín B. R: $\vec v = -0.45\overrightarrow{u_r} + 0.27\overrightarrow{u_\theta}$ m/s, $\vec a = -0.39\overrightarrow{u_r} - 0.36\overrightarrow{u_\theta}$ m/s²



$30°\cdot\frac{\pi\,rad}{180°} = \frac{\pi}{6}$ rad

$\frac{\pi}{6}$ rad $= 0.15t^2 \Rightarrow t = 1.87$ s

$r = 0.48$ [m] $\theta = 0.15t^2$

$\dot r = -0.24t$ $\dot\theta = 0.30t$

$\dot r = -0.45$ [m/s] $\dot\theta = 0.56$ rad/s

$\vec v = \dot r\,\vec{u_r} + r\dot\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec v = -0.45\,\vec{u_r} + 0.27\,\vec{u_\theta}$ [m/s] //

$\vec a = (\underbrace{\ddot r - r\dot\theta^2}_{a_r})\vec{u_r} + (\underbrace{2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta}_{a_\theta})\vec{u_\theta}$

$\ddot r = -0.24$ [m/s²]

$\ddot\theta = 0.30$ [rad/s²]

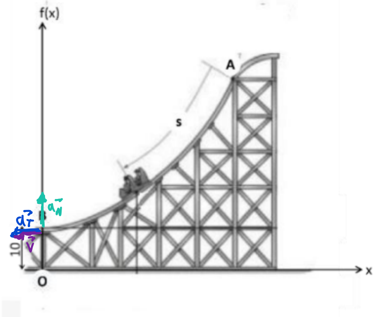
$a_r = -0.39$ [m/s²]

$a_\theta = -0.36$ [m/s²]

$\vec a = -0.39\,\vec{u_r} - 0.36\,\vec{u_\theta}$ [m/s²] //

18. Considere el carrito en la montaña rusa que se representa por la ecuación $f(x) = \frac{x^2}{10} + 10$ m. El carrito empieza a moverse a partir del reposo en A y su rapidez cambia de acuerdo a $a_T = 10 + 2s$ m/s², donde s representa la distancia recorrida sobre la curva a partir de A. Si se conoce que la distancia recorrida hasta B es $s = 10$ m. Determine en el punto B: la magnitud de su aceleración, el radio de curvatura y el valor de $\ddot{r}$.

R: $a = 10\sqrt{73}$ m/s², $\rho = 5$ m, $\ddot{r} = 120$ m/s²



$y = \frac{x^2}{10} + 10$

$y' = \frac{x}{5} = 0$

$y'' = \frac{1}{5}$

$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$

$\rho = \frac{1}{1/5} = 5\ [m]$ //

$a_T = 10 + 2 \cdot 10$

$a_T = 30\ [m/s^2]$

$v\,dv = a_T\,ds$

$\frac{v^2}{2} = 10s + s^2 + \cancel{C_1}^{\,0}$

$v = \sqrt{20s + 2s^2}$

$v = 20\ [m/s]$

$a_N = \frac{20^2}{5} = 80\ [m/s^2]$

$a^2 = a_T^2 + a_N^2$

$a = 10\sqrt{73}\ [m/s^2]$ //

$V = V_\theta$

$V_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V}{r} = \frac{20}{10} = 2\ [m/s]$

$a_r = a_N$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

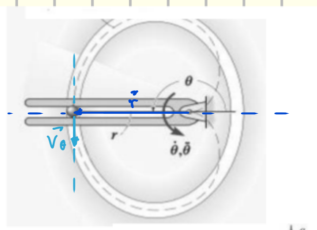
$\Rightarrow \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2$

$\ddot{r} = 80 + 10 \cdot 2^2$

$\ddot{r} = 120\ [m/s^2]$

19. Debido a la rotación de la barra ahorquillada, la bola de la figura se mueve alrededor de una trayectoria ranurada, una parte de la cual tiene la forma de un cardiode $r = 0.5(1 - \cos\theta)$ m, donde θ está en radianes. Si la velocidad tiene una magnitud de 4 m/s y su aceleración una magnitud de 30 m/s² en el instante en que $\theta = 180^0$, determine $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$.

R: $\dot{\theta} = 4$ rad/s, $\ddot{\theta} = 18$ rad/s²



$r = 0.5(1 - \cos(180))$

$r = 1\ [m]$

$V = V_\theta = 4$

$V_\theta = r\dot{\theta}$

$\Rightarrow \dot{\theta} = V_\theta / r$

$\dot{\theta} = 4/1$

$\dot{\theta} = 4\ [rad/s]$ //

$\dot{r} = 0.5 \cdot \dot{\theta} \cdot \mathrm{sen}(\theta)$

$\dot{r} = 0$

$\ddot{r} = 0.5 \cdot \ddot{\theta} \cdot \mathrm{sen}(\theta) + 0.5\,\dot{\theta}^2 \cos(\theta)$

$\ddot{r} = 0.5 \cdot 4^2 \cdot -1 = -8$

$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\vec{u_r} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{a_\theta}\vec{u_\theta}$

$a_r = -8 - 16 = -24$

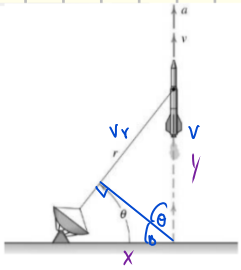
$a_\theta = 1 \cdot \ddot{\theta} = \ddot{\theta}$

$30^2 = 24^2 + \ddot{\theta}^2$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = 18\ [rad/s^2]$ //

20. El cohete ha sido disparado verticalmente y es seguido por el radar que se representa. Cuando $\theta = 60^0$, se conoce que $r = 9$ km, $\ddot{r} = 21$ m/s^2 y $\dot{\theta} = 0.02$ rad/s. Halle las magnitudes de la velocidad y de la aceleración del cohete para esta posición y los valores de $\dot{r}$ y $\ddot{\theta}$.

R: $v = 360$ m/s, $a = 20.09$ m/s^2, $\dot{r} = 311.77$ m/s, $\ddot{\theta} = -2.69 \times 10^{-4}$ rad/s^2



$\cos(60°) = x/y \Rightarrow x = 4.5$

$\tan(\theta) = y/x \Rightarrow y = x\tan(\theta)$

$V_y = x\sec^2(\theta)\,\dot{\theta}$

$V_y = 360$ [m/s] //

$\cos(\theta) = x/r$

$x = r\cos(\theta)$

$0 = \dot{r}\cos(\theta) - r\,\text{sen}(\theta)\,\dot{\theta}$

$\dot{r} = \dfrac{r\,\text{sen}(\theta)\,\dot{\theta}}{\cos(\theta)}$

$\dot{r} = 311.77$ [m/s] //

Otra forma

$\text{sen}(60) = V_r / V$

$\Rightarrow V_r = V\,\text{sen}(60°)$

$\dot{r} = V_r = 311.77$ [m/s] //

$\vec{a} = (\underbrace{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}_{a_r})\vec{u_r} + (\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}_{a_\theta})\vec{u_\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -17.4$ [m/s^2]

$\text{sen}(\theta) = a_r/a \Rightarrow a = \dfrac{a_r}{\text{sen}(\theta)}$

$a = \dfrac{17.4}{\text{sen}(60°)} = 20,09$ [m/s^2] //

$\cos(60°) = a_\theta / a$

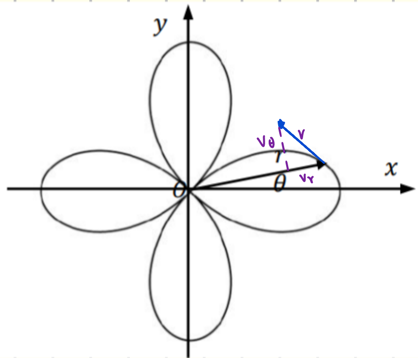
$\Rightarrow a_\theta = a\cos(60°)$

$a_\theta = 10,05$ [m/s^2]

$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} = \dfrac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = -2,69 \times 10^{-4}$ rad/s^2 //

21. Una partícula se mueve por la trayectoria mostrada en la figura, de tal manera que $r = (5\cos 2\theta)$ m, si la velocidad angular del vector posición de la partícula es $\dot{\theta} = 3t^2$ rad/s y al instante $t_0 = 0$ s, se conoce que $\theta_0 = 0$ rad, determine para el instante t_1, en el cual $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ rad: a) Las componentes radial y transversal de la velocidad de la partícula. b) Las componentes radial y transversal de la aceleración de la partícula. c) La magnitud del radio de curvatura. R: a) $\vec{v} = -16.88\,\vec{u_r} + 4.87\,\vec{u_\theta}$ m/s. b) $\vec{a} = -89.36\,\vec{u_r} - 53.7\,\vec{u_\theta}$ m/s^2. c) $\rho = 4.04$ m.



(a) $\dot{\theta} = 3t^2 \Rightarrow \theta = t^3$

$t_1 = \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{6}} \approx 0.806$ s

$\dot{\theta} = 3 \cdot 0,806^2 \approx 1.949$ rad/s

$r = 5\cos(\pi/3) = 2.5$ [m]

$\dot{r} = -10\,\dot{\theta}\,\text{sen}(2\theta)$

$V_r = \dot{r} = -10(1.949)\,\text{sen}(\pi/3)$

$V_r = -16.88$ [m/s]

$V_\theta = r\dot{\theta}$

$V_\theta = 2.5 \cdot 1,949$

$V_\theta = 4,87$ [m/s]

$\therefore \vec{V} = -16.88\,\vec{u_r} + 4.87\,\vec{u_\theta}$ [m/s] //

(b) $\vec{a} = (\underbrace{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}_{a_r})\vec{u_r} + (\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}_{a_\theta})\vec{u_\theta}$

$\dot{r} = -10\,\dot{\theta}\,\text{sen}(2\theta)$

$\ddot{r} = -10(\ddot{\theta}\,\text{sen}(2\theta) + 2\dot{\theta}^2\cos(2\theta))$

$\ddot{\theta} = 6t = 6 \cdot 0.806 = 4.836 \text{ rad/s}^2$

$\ddot{r} = -79.867$

$a_r = -79.867 - 2.5 \cdot 1.949^2$

$a_r = -89.364\,[m/s^2]$

$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

$a_\theta = -53.708\,[m/s^2]$

$\therefore \vec{a} = -89.364\vec{u_r} - 53.708\vec{u_\theta}\,[m/s^2]$ //

(c) $\rho = \dfrac{v^3}{|v \times a|}$, $v = 17.568\,[m/s]$

$|v \times a| = \det \begin{vmatrix} -16.88 & 4.87 \\ -89.36 & -53.71 \end{vmatrix} = 1341.639\,[m^2/s^3]$

$\rho = \dfrac{(17.568)^3}{1341.639} = 4.04\,[m]$ //

22. Considere una partícula que se mueve sobre la trayectoria dada por la ecuación $2x^2 - y^2 = 2$. Si se conoce que en el punto $P = (2, \sqrt{6})$ m, la partícula se mueve de izquierda a derecha con movimiento acelerado, con una rapidez de 10 m/s y una aceleración de magnitud 12 m/s^2, determine en el punto P: a) las componentes radial y transversal de su velocidad y b) las componentes normal y tangencial de su aceleración. R: a) $\vec{v} = 9.91\,\overrightarrow{u_r} + 1.34\,\overrightarrow{u_\theta}$ m/s. b) $\vec{a} = 11.36\,\overrightarrow{u_T} + 3.87\,\overrightarrow{u_N}$ m/s^2

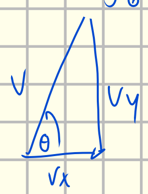
(a) $2x^2 - y^2 = 2$

$4x - 2yy' = 0$

$\Rightarrow y' = \dfrac{2x}{y} \approx 1.633$

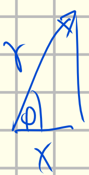
$y' = \tan(\theta) = \dfrac{2x}{y}$

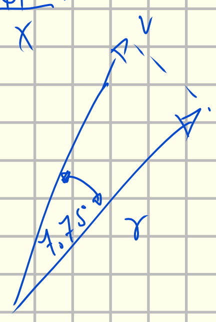
$\tan(\theta) = \dfrac{2 \cdot 2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \theta = 58.518^\circ$



$\tan(\phi) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow \phi = 50.768^\circ$





$v_r = 10\cos(7.75^\circ)$

$v_r = 9.91\,[m/s]$

$v_\phi = 10\,\text{sen}(7.75^\circ)$

$v_\phi = 1.35\,[m/s]$

$\therefore \vec{V} = 9.91\vec{u_r} + 1.35\vec{u_\theta}\,[m/s]$

(b) $y' = \dfrac{2x}{y} \Rightarrow y'' = \dfrac{2y - 2xy'}{y^2} = -0.272$

$\rho = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = 25.81\,[m]$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{10^2}{25{,}81} \approx 3{,}87 \ [m/s^2]$$

$$\Rightarrow a_T = \sqrt{12^2 - 3{,}87^2} = \pm 11{,}36 \ [m/s^2]$$

OBS, se toma + porque va de izquierda a derecha

$$\therefore \vec{a} = 11{,}36 \ \vec{u}_T + 3{,}87 \ \vec{u}_N \ [m/s^2] \ //$$