# MECÁNICA NEWTONIANA

2020 A

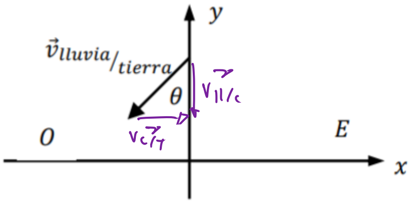
HOJA DE TRABAJO 5

**CINEMÁTICA 2**

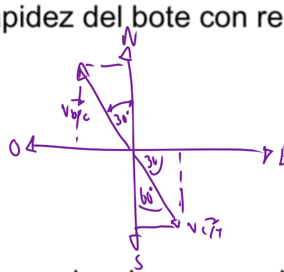
## PREGUNTAS

1. Si el movimiento de dos sistemas de referencia A y B es rectilíneo uniforme respecto a otro sistema de referencia C, se cumple que la velocidad relativa del sistema de referencia A respecto a B:
   a) es constante y su derivada temporal es cero
   b) es variable y su derivada temporal es cero
   c) es nula y su derivada temporal es diferente de cero
   d) es constante y su derivada temporal es diferente de cero

2. Una camioneta se mueve sobre el eje $x$, con velocidad constante, en una región donde la lluvia cae formando un ángulo $\theta$ respecto a tierra, como se indica en la figura; si con respecto a la camioneta la lluvia cae verticalmente, entonces la camioneta:
   a) no se mueve
   b) se mueve hacia el Este
   c) se mueve hacia el Oeste
   d) puede moverse en cualquier dirección
   e) no se puede determinar hacia donde se mueve




3. Una persona necesita 8 minutos para trasladarse en bote, a un punto situado a 400 m al norte de donde se encuentra. Para esto el bote enfila en la dirección $N30°O$. La corriente en la región está en la dirección $S60°E$. La rapidez del bote con respecto a la corriente en m/min, es:
   a) $25\sqrt{2}$
   b) $50$
   c) $50\sqrt{2}$
   d) $50\sqrt{3}$
   e) $100\sqrt{3}$




$\vec{V}_{b/t} = \vec{V}_{b/c} + \vec{V}_{c/t}$

$\vec{V}_{b/t} = \frac{400m}{8min}\vec{j}$

$\begin{cases} \vec{V}_{b/t} = 50 \, m/min \, \vec{j} \\ \vec{V}_{b/c} = V\cos(120°)\vec{i} + V\text{sen}(120°)\vec{j} \\ \vec{V}_{c/t} = K\cos(-30°)\vec{i} + K\text{sen}(-30°)\vec{j} \end{cases}$

$V\cos(120°) + K\cos(-30°) = 0$

$\frac{1}{2}V = \frac{\sqrt{3}}{2}K \Rightarrow V = \sqrt{3}K$

$V\text{sen}(120°) + K\text{sen}(-30°) = 50.$

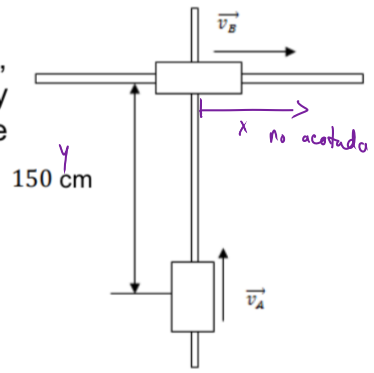
$V\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}K = 50$

$\frac{3K}{2} - \frac{1}{2}K = 50$

$\Rightarrow K = 50 \, m/min$

$V = \sqrt{3} \, 50 \, m/min$

4. Dos argollas se desplazan por dos carriles que se cortan en ángulo recto, como se muestra en la figura, con velocidades constantes; $v_A = 12$ cm/s y $v_B = 9$ cm/s. A partir de las posiciones mostradas, la distancia mínima de separación entre las argollas, durante su movimiento es:
   a) 39.4 cm
   b) 45.0 cm
   c) 78.9 cm
   d) 90.0 cm
   e) 150.0 cm




$A(t) = 150 - 12t$

$B(t) = 9t$

$l^2 = A(t)^2 + B(t)^2$

$l^2 = 150^2 - 3600t + 144t^2 + 81t^2$

$l^2 = 225t^2 - 3600t + 150^2$

$l(t) = \sqrt{225t^2 - 3600t + 150^2}$

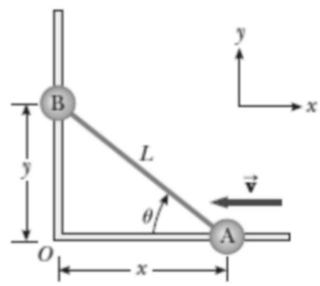
$l'(t) = \frac{450t - 3600}{2\sqrt{225t^2 - 3600t + 150^2}}$

$0 = 450t - 3600$

$\Rightarrow t = 8 \, s$

$l(8) = 90 \, m$

5. Dos objetos, $A$ y $B$ se conectan mediante una barra rígida que tiene longitud $L$. Los objetos se deslizan a lo largo de rieles guía perpendiculares como se muestra en la figura. Si $A$ se desliza hacia la izquierda con una rapidez constante $v$, la rapidez de $A$ respecto a $B$ cuando $\theta = 60°$, es:
   a) $\frac{\sqrt{3}}{3}v$
   b) $v$
   c) $\sqrt{3}\,v$
   d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}v$
   e) *otro valor*




$x^2 + y^2 = L^2$

$2x v_x + 2y v_y = 0$

$v_x = -\frac{y}{x} v_y$

$v_x = -\tan(\theta) v_y$

Como $-v_x = v$

$v = \tan(\theta) v_y$

$\Rightarrow v_y = \frac{v}{\tan(\theta)}$

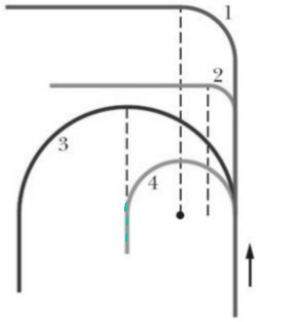
$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = V\vec{i} - \frac{V}{\tan(\theta)}\vec{j}$

$|\vec{V}_{A/B}| = \sqrt{V^2 + \frac{V^2}{3}}$

$= \sqrt{\frac{4V^2}{3}} = \frac{2V}{\sqrt{3}} = \frac{2V\sqrt{3}}{3}$

6. La figura muestra cuatro pistas con semicírculos y cuartos de círculo que puede tomar un tren con rapidez constante. Clasifique las vías de acuerdo a la magnitud de la aceleración del tren, en forma descendente, cuando el tren toma la curva.




a) $a_4 \geq a_2 \geq a_1 \geq a_3$ 4
b) $a_2 \geq a_4 \geq a_1 \geq a_3$
c) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$
d) $a_3 \geq a_4 \geq a_1 \geq a_2$
e) $a_2 \geq a_3 \geq a_1 \geq a_4$

$V = cte$

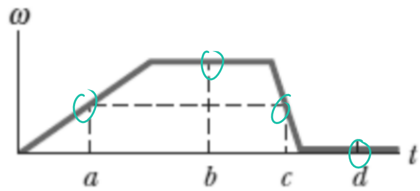
$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow +R - a_N$

$R_4 < R_2 < R_3 < R_1$

$\Rightarrow a_4 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_1$

7. La figura mostrada es un gráfico de la velocidad angular de un disco en función del tiempo. Para un punto en el borde del disco, analice los instantes de tiempo $a, b, c$ y $d$.
La magnitud de la aceleración tangencial:
a) es igual y diferente de cero en los instantes $a, b$, $c$ y $d$
b) es nula en cualquier instante
c) es máxima en el instante b
d) es igual y diferente de cero en los instantes $a$ y $c$
e) es nula en el instante $b$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$




8. La magnitud de la aceleración normal:
a) es igual y diferente de cero en los instantes $a, b, c$ y $d$
b) es nula en cualquier instante
c) es máxima en el instante $d$
d) es igual y diferente de cero en los instantes $a$ y $c$
e) es nula en el instante $b$

$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

9. Un disco gira alrededor de un eje fijo, y la posición angular de una línea de referencia en el disco es $\theta = ae^{bt}$, donde $\theta$ está en radianes, $a$ y $b$ son constantes, $t$ está en segundos. Considere un punto del disco que está a $R$ metros del eje de rotación. La relación $a_N/a_T$ es:
a) 0
b) $\theta$
c) 1
d) $a\theta$
e) $R$

$\theta = a e^{bt}$
$\omega = a b e^{bt}$
$\alpha = a b^2 e^{bt}$
$a_T = \alpha \cdot R$
$a_T = a b^2 e^{bt} R$

$a_N = \omega^2 R$
$a_N = a^2 b^2 e^{2bt} R$

$\frac{a_N}{a_T} = \frac{a^2 b^2 e^{2bt} R}{a b^2 e^{bt} R}$
$= a e^{bt}$
$= \theta$ 4

10. Una partícula se mueve a lo largo de una circunferencia de radio $R$ en el plano $xy$ con centro en el origen de la circunferencia, de forma que el módulo de la aceleración tangencial es constante. En este movimiento la magnitud de la aceleración normal:
a) varía con el tiempo de acuerdo con la relación: $a_n = At^2 + Bt + C$, $(A, B, C$, son constantes)
b) varía linealmente con el tiempo, $a_n = At + B$, $(A, B$, son constantes)
c) varía con el tiempo de una manera que no es lineal, ni cuadrática
d) es constante
e) no se puede determinar cómo varía

$v(t) = v_0 + a_T \cdot t$

$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2 + 2v_0 a_T t \cdot a_T^2 t^2}{R} = \underbrace{\frac{v_0^2}{R}}_{C} + \underbrace{\frac{2v_0 a_T}{R}}_{B} \cdot t + \underbrace{\frac{a_T^2}{R}}_{A} t^2$

$At^2 + Bt + C$

11. En un instante dado, una partícula ocupa la posición $\vec{r} = 5\,\vec{k}$ m, tiene una velocidad de $\vec{v} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ m/s y una aceleración $\vec{a} = -2.5\vec{k}$ m/s². La aceleración tangencial en dicho instante es:
a) $\overrightarrow{a_T} = \vec{0}$ m/s²
b) $\overrightarrow{a_T} = -2.5\,\overrightarrow{u_T}$ m/s²
c) $\overrightarrow{a_T} = -1.5\,\overrightarrow{u_T}$ m/s²
d) $\overrightarrow{a_T} = 2.5\,\overrightarrow{u_T}$ m/s²
e) $\overrightarrow{a_T} = 1.5\,\overrightarrow{u_T}$ m/s²

$\frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{|v|} = a_T$

$\frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot -2.5}{5} = a_T = -1.5$

$\vec{a_T} = -1.5\,\vec{u_T}$ m/s

12. Un automóvil se mueve con velocidad constante de magnitud 72 km/h. ¿Cuántas revoluciones por segundo dan sus ruedas si avanzan sin deslizamiento y su radio es de 50 cm?
a) $20/\pi$
b) $72/100\pi$
c) $72/\pi$
d) $10/\pi$
e) $40/\pi$

$V = 72 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000 m}{1 km} \cdot \frac{1h}{3600 s} \cdot \frac{100 cm}{1m} = 2000$ cm/s

$V = \omega R$

$\Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{2000 \text{ cm/s}}{50 \text{ cm}} = 40$ rad/s $\cdot \frac{1 rev}{2\pi rad} = \frac{20}{\pi}$ rev/s

13. Una partícula describe un movimiento circular de radio $r$ centrado en el origen de coordenadas, de modo que la ubicación angular de su radio vector posición es, $\theta = 13t^3 - 13t$ rad , donde el tiempo $t$ se expresa en segundos. Para el intervalo de tiempo de 2 a 6 segundos, la partícula tiene movimiento:

a) uniforme.
b) uniformemente variado
c) acelerado
d) retardado
e) primero acelerado y luego desacelerado

$\omega = 39t^2 - 13$

$\alpha = 78t$

14. Un cuerpo se mueve sobre una trayectoria en el espacio. Suponga que al tiempo $t_1$ se conoce que su rapidez es $v_0$ diferente de cero, y la magnitud de su radio de curvatura $\rho(t_1)$ es infinita, entonces es correcto afirmar que:

a) la trayectoria es necesariamente una línea recta
b) al tiempo $t_1$ la aceleración normal no está definida
c) la aceleración y la velocidad necesariamente apuntan en la misma dirección en $t_1$
d) la aceleración tangencial es necesariamente igual a cero en el punto $t_1$
e) nada de lo anterior se cumple

$a_N = \frac{V^2}{\rho}$

$\rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V_0^2}{0} = \infty$

15. Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones $x = mt$, $y = \frac{1}{2}mt^2 - 5$, $z = 8 - \frac{1}{3}mt^3$. Determine el módulo de su radio de curvatura, en función del tiempo $t$.

a) $\rho = \frac{m(1+t^2+t^4)^{3/2}}{\sqrt{1+4t^2+t^4}}$

b) $\rho = \frac{m(1+4t^2+t^4)^{3/2}}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2+t^4)-(t^3+2t)^2}}$

c) $\rho = \frac{m(1+t^2+t^4)^{3/2}}{\sqrt{(1+t^2)(1+4t^2+t^4)-(t^3+2t)^2}}$

d) $\rho = \frac{m(1+4t^2+t^4)^{3/2}}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

e) *no se puede determinar*

$$\begin{cases} x = mt \\ y = \frac{1}{2}mt^2 - 5 \\ z = 8 - \frac{1}{3}mt^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = m \\ v_y = mt \\ v_z = -mt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = m \\ a_z = -2mt \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} a &= \sqrt{m^2 + 4m^2t^2} \\ a &= m\sqrt{1+4t^2} \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{m^2 + m^2t^2 + m^2t^4}$$
$$V = m\sqrt{1+t^2+t^4} \rightsquigarrow \frac{dv}{dt} = a_T = \frac{m(2t+4t^3)}{2\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow a_N = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_T^2}} \quad //$$

$$a_N = \sqrt{m^2(1+4t^2) - \frac{m^2(2t+4t^3)^2}{4+4t^2+4t^4}} = m\sqrt{\frac{(1+4t^2)(4+4t^2+4t^4) - (2t+4t^3)^2}{4+4t^2+4t^4}}$$

$$a_N = m\sqrt{\frac{4+\cancel{4t^2}+4t^4+16t^2+\cancel{16t^4}+\cancel{16t^6}-\cancel{4t^2}-\cancel{16t^4}-\cancel{16t^6}}{4+4t^2+4t^4}} =$$

$$= m\sqrt{\frac{4+4t^4+16t^2}{4+4t^2+4t^4}} = m\sqrt{\frac{1+t^4+4t^2}{1+t^2+t^4}}$$

$$\rho = \frac{V^2}{a_N} = m^2(1+t^2+t^4) \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{1+t^2+t^4}{1+4t^2+t^4}\right)^{1/2} = \frac{m(1+t^2+t^4)^{3/2}}{(1+4t^2+t^4)^{1/2}} \quad //$$

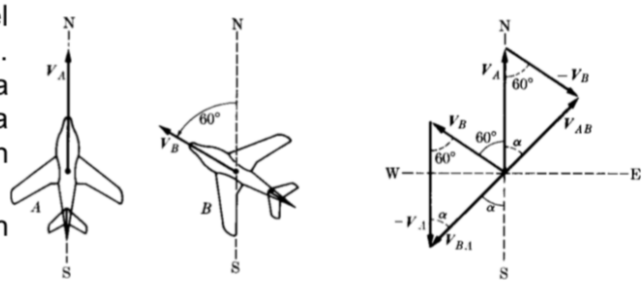
OBS: $\rho = \frac{|V|^3}{|V \times a|}$

## PROBLEMAS

### Movimiento Relativo

1. Un aeroplano $A$ como se muestra en la figura vuela hacia el Norte a 300 millas por hora con respecto a la Tierra. Simultáneamente otro avión $B$ vuela en la dirección $N60^oO$ a 200 millas por hora con respecto a la Tierra. Encuentre la velocidad de $A$ con respecto a $B$ y la velocidad de $B$ con respecto a $A$.

   R: $\overrightarrow{V_{A/B}} = 100\sqrt{3}\vec{\imath} + 200\vec{\jmath}$ mi/h $\overrightarrow{V_{B/A}} = -100\sqrt{3}\vec{\imath} - 200\vec{\jmath}$ mi/h




$\vec{V_A} = 300\,\vec{j}$ mil/h

$\vec{V_B} = -173.21\,\vec{i} + 100\,\vec{j}$ mil/h

$\vec{V_{A/B}} = \vec{V_A} - \vec{V_B} = 173.21\,\vec{i} + 200\,\vec{j}$ mil/h //

$\vec{V_{B/A}} = \vec{V_B} - \vec{V_A} = -173.21\,\vec{i} - 200\,\vec{j}$ mil/h //

2. La rapidez del sonido en aire quieto a 25° C es de 358 m/s. Encuentre la velocidad medida por un observador que se mueve a 90 km/h a) alejándose de la fuente, b) acercándose hacia la fuente, c) perpendicular a la dirección de propagación del sonido en el aire, d) en una dirección tal que el sonido parece propagarse perpendicularmente a la dirección del observador. Suponga que la fuente se encuentra en reposo relativo a la tierra. R: a) $333\,\vec{\imath}$ m/s; b) $383\,\vec{\imath}$ m/s; c) $358\,\vec{\imath} \pm 25\,\vec{\jmath}$ m/s

a) $\vec{V_{V/T}} = 358\,\vec{i}$ m/s

$\vec{V_{O/T}} = 90\,\vec{i}$ Km/h $= 25\,\vec{i}$ m/s

$\vec{V_{T/O}} = -\vec{V_{O/T}} = -25\,\vec{i}$ m/s

$\vec{V_{V/O}} = \vec{V_{V/T}} + \vec{V_{T/O}} = 358\,\vec{i} - 25\,\vec{i}$ m/s $= 333\,\vec{i}$ m/s

b) $\vec{V_{O/T}} = -25\,\vec{i}$ m/s

$\vec{V_{T/O}} = -\vec{V_{O/T}} = 25\,\vec{i}$ m/s

$\vec{V_{V/O}} = \vec{V_{V/T}} + \vec{V_{T/O}} = 358\,\vec{i} + 25\,\vec{i}$ m/s $= 383\,\vec{i}$ m/s

c) $\vec{V_{O/T}} = \pm 25\,\vec{j}$ m/s

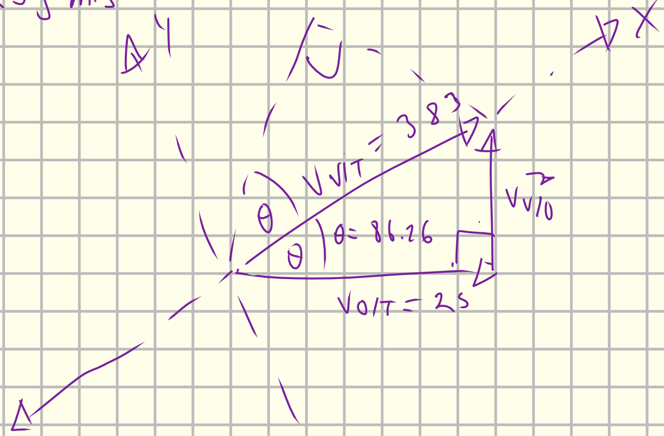
$\vec{V_{T/O}} = \pm\vec{V_{O/T}} = \pm 25\,\vec{j}$ m/s

$\vec{V_{V/O}} = \vec{V_{V/T}} + \vec{V_{T/O}} = 358\,\vec{i} \pm 25\,\vec{j}$ m/s

d) $\vec{V_{V/O}} = \pm 382.18\,\vec{j}$ m/s

$V_{V/O} = \sqrt{383^2 - 25^2}$ m/s

$\vec{V_{O/T}} = 25\cos(\pm 86.26°)\,\vec{i} + 25\,\mathrm{sen}(\pm 86.26°)$



3. Dos autos que se desplazan en caminos perpendiculares viajan hacia el norte y el este respectivamente. Si sus rapideces con respecto a la tierra son de 60 km/h y de 80 km/h, a) calcule su velocidad relativa. b) ¿Depende la velocidad relativa de la posición de los autos en sus respectivos caminos? c) Repita el problema, suponiendo que el segundo auto se desplaza hacia el oeste. R: $\overrightarrow{v_{A/B}} = \frac{50}{3}\vec{\imath} - \frac{200}{9}\vec{\jmath}$ m/s

(a) $\vec{V_A} = 60\vec{j}$ km/h

$\vec{V_B} = 80\vec{i}$ km/h

$\vec{V_{A/B}} = -\vec{V_{B/A}} = \vec{V_A} - \vec{V_B} = -80\vec{i} + 60\vec{j}$ km/h $= -\frac{200}{9}\vec{i} + \frac{50}{3}\vec{j}$ m/s

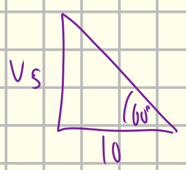
(b) La velocidad relativa no depende de una posición puntual, sólo de su velocidad.

(c) $\vec{V_B} = -80\vec{i}$ km/h

$\vec{V_{A/B}} = -\vec{V_{B/A}} = 80\vec{i} + 60\vec{j}$ km/h $= \frac{200}{9}\vec{i} + \frac{50}{3}\vec{j}$ m/s

5. Un niño que está dentro de un vagón plataforma de un tren lanza una bola al aire a lo largo de una trayectoria que él juzga con un ángulo de $60^o$ sobre la horizontal. El tren viaja a lo largo de una pista horizontal recta con una rapidez constante de 10 m/s. La madre del niño, que está de pie en el suelo cerca de ahí, observa que la bola se eleva verticalmente. ¿Qué tan alto va a elevarse la bola? R:15.3 m

$\vec{V_{V/T}} = 10\vec{i}$ m/s




$V_s = 10\tan(60°)$

$V_s = 10\sqrt{3} \approx 17.32$ m/s.

$t = \frac{17.32}{9.8} \approx 1.77$ s

$h(t) = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$h(1.77) = 15.31$ m

**Movimiento Circular**

6. Una partícula se está moviendo en una trayectoria circular de acuerdo a la ley $\theta = 3t^2 + 2t$, donde $\theta$ se mide en radianes y $t$ en segundos. Calcule la velocidad angular y la aceleración angular de su radio vector, después de 4 s. R:26 rad/s; 6 rad/s$^2$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega = 6t + 2 \Rightarrow \omega(4) = 6 \cdot 4 + 2 = 26$ rad/s.

$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = 6 \Rightarrow \alpha(4) = 6$ rad/s$^2$

7. Un cuerpo, inicialmente en reposo ($\theta = 0$ rad y $\omega = 0$ rad/s cuando $t = 0$ s) es acelerado en una trayectoria circular de 1.3 m de radio de acuerdo a la ecuación $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$ rad/s$^2$. Encuentre $\theta$ y $\omega$ en función del tiempo, y la magnitud de las componentes tangencial y normal de la aceleración del cuerpo. R: $\theta(t) = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2$ rad; $\omega(t) = 40t^3 - 24t^2 + 16t$ rad/s; $a_N(t) = 1.3(40t^3 - 24t^2 + 16t)^2$ m/s$^2$; $a_T(t) = 156t^2 - 62.4t + 20.8$ m/s$^2$

$r = 1.3$ m

(a) $\omega(t) = ?$ ; $\theta(t) = ?$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha\, dt \Rightarrow \omega = \int \alpha\, dt =$

$$w = 120\frac{t^3}{3} - 48\frac{t^2}{2} + 16t + C_1$$

Como $w(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$w(t) = 40t^3 - 24t^2 + 16t$ rad/s //

$$\frac{d\theta}{dt} = w \Rightarrow d\theta = w\,dt \Rightarrow \theta = \int w\,dt$$

$$\theta = 40\frac{t^4}{4} - 24\frac{t^3}{3} + 16\frac{t^2}{2} + C_1'$$

Como $\theta(0) = 0 \Rightarrow C_1'' = 0$

$\theta(t) = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2$ rad //

(b) $a_N(t) = ?$ , $a_T(t) = ?$

$\vec{a_T} = r\alpha = 1.3\,\alpha = 156t^2 - 62.4t + 20.8$ m/s² //

$\vec{a_N} = w^2 r = 1.3(40t^3 - 24t^2 + 16t)^2$ m/s² //

8. Dos móviles $A$ y $B$ parten del mismo punto de una circunferencia de radio $R$ m y tienen la misma rapidez inicial $v_o$ m/s aunque salen en sentidos opuestos. Uno de los movimientos es acelerado y el otro retardado, pero el módulo de su aceleración y desaceleración respectivamente es el mismo y constante. a) Calcule el valor de la aceleración angular sabiendo que el móvil dotado de movimiento retardado en el instante del encuentro lleva velocidad nula. b) Halle la magnitud de la aceleración total de cada uno de los móviles en el momento del encuentro. R:$\alpha = \frac{v_o^2}{\pi R^2}$ rad/s²; $a_A = \frac{v_o^2}{\pi R}\sqrt{16\pi^2+1}$ m/s² ;$a_B = \frac{v_o^2}{\pi R}$ m/s²

| | | |
|---|---|---|
| $\theta_0 = 0$ rad | A: Acelerado | B: Retardado |
| $R = R$ | $R = R$ | $R = R$ |
| $V_A = -V_B$ | $V_A = V_0$ | $V_B = -V_0$ |
| $\alpha = \alpha$ | $\alpha = \alpha$ | $\alpha = \alpha$ |
| | $w_A = V_0/R$ | $w_B = -V_0/R$ |

(a) $w_B(t) = w_B + \alpha t \Rightarrow 0 = -\frac{V_0}{R} + \alpha t \Rightarrow t = \frac{V_0}{R\alpha}$

$|\theta_A| + |\theta_B| = 2\pi$ rad

$$\frac{V_0}{R}\cancel{\cdot t} + \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2 + \frac{V_0}{R}\cancel{\cdot t} - \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2 = 2\pi \text{ rad}$$

$$2\frac{V_0}{R}t = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \cancel{2}\frac{V_0}{R}\cdot\frac{V_0}{R\alpha} = \cancel{2}\pi \text{ rad} \Rightarrow \frac{V_0^2}{R^2\alpha} = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{V_0^2}{\pi R^2} \text{ rad/s}^2 \text{ //}$$

(b) $$a_{TA} = \alpha R = \frac{V_0^2}{\pi R^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{R} = \frac{V_0^2}{\pi R}$$

$$a_{NA} = \frac{V_A^2(V_0/R\alpha)}{R} = \left(V_0 + \cancel{\alpha}\cancel{R}\cdot\frac{V_0}{\cancel{R}\cancel{\alpha}}\right)^2\cdot\frac{1}{R} = \frac{4V_0^2}{R}$$

$$a_A = \sqrt{\frac{V_0^4}{\pi^2R^2} + \frac{16V_0^4}{R^2}} = \frac{V_0^2}{R}\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + 16} = \frac{V_0^2}{\pi R}\sqrt{16\cdot\pi^2 + 1} \text{ //}$$

$a_{NB} = 0$

$a_B = \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{\pi R}\right)^2} = \frac{V_0^2}{\pi R}$ //

9. Un punto se mueve en una circunferencia de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde $s$ se mide en metros a lo largo de la circunferencia y $t$ en segundos. Si la aceleración total del punto tiene una magnitud de $16\sqrt{2}$ m/s² cuando $t = 2$ s. a) Calcule el radio de la circunferencia y b) las magnitudes de las componentes tangencial y centrípeta de la aceleración. R: a) 25 m; b) $a_T = 16$ m/s², $a_N = 16$ m/s²

$\frac{ds}{dt} = v = 3t^2 + 4t \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a_T = 6t + 4$

$v(2) = 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 = 20$ m/s ; $a_T(2) = 6\cdot 2 + 4 = 16$ m/s² //

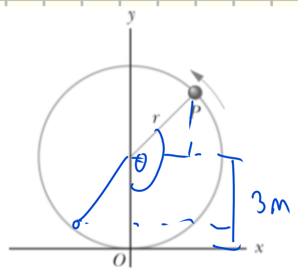
$a^2 = a_T^2 + a_N^2$ $\qquad a_N(2) = \frac{20^2}{25} = 16$ m/s² //

$(16\sqrt{2})^2 = (16)^2 + \left(\frac{20^2}{R}\right)^2$

$16^2 \cdot 2 = 16^2 + \frac{20^4}{R^2} \Rightarrow (16^2\cdot 2 - 16^2) = \frac{20^4}{R^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{20^4}{16^2}} = 25$ m //

10. Una partícula $P$ viaja con una rapidez constante sobre una circunferencia de radio $r = 3$ m y completa una revolución en 20 s. La partícula pasa a través de $O$ al tiempo $t = 0$ s. Con respecto a $O$, encuentre la posición, velocidad y aceleración centrípeta en función del tiempo.

R: $\vec{r} = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right)\vec{\imath} + (3 + 3\sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t))\vec{\jmath}$ m




$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{20 \text{ s}} = \frac{\pi}{10}$ rad/s $\wedge$ $\theta = \omega t = \frac{\pi}{10}\cdot t$

$3\cos(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \cos^{-1}(0)$, $t_0 = \pm 90° = \pm\pi/2$

$\cancel{3}\,\text{sen}(t_0) = -\cancel{3}$, $\text{sen}(t_0) = -1$, $t_0 = \text{sen}^{-1}(-1)$, $t_0 = -\pi/2$

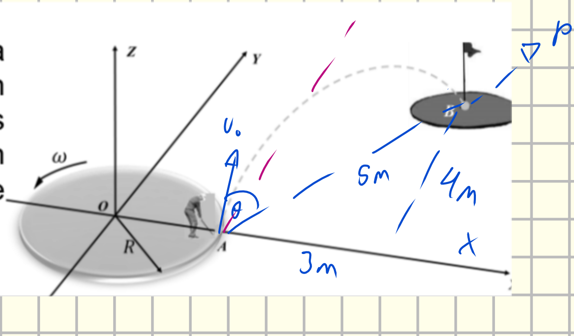
$x(t) = 3\cos(\pi/10\cdot t - \pi/2)$

$y(t) = 3 + 3\,\text{sen}(\pi/10\cdot t - \pi/2)$

$\therefore \vec{r} = 3\cos(\pi/10\cdot t - \pi/2)\vec{\imath} + (3 + 3\,\text{sen}(\pi/10\, t - \pi/2))\vec{\jmath}$

11. En el extremo de una plataforma circular de radio $R = 2$ m que gira con una rapidez angular constante $\omega = 1.93$ rad/s, se encuentra un golfista que hace un hoyo en uno como se muestra en la figura. Si las coordenadas del punto $B$ son (5,4,0) m. Determine la velocidad con que el golfista debe lanzar la pelota respecto a la plataforma para que llegue al punto $B$ con una rapidez de $v_B = 10$ m/s.

R: $\vec{v} = 5.8\vec{\imath} + 3.9\vec{\jmath} + 2.5\vec{k}$ m/s



$\vec{r_{A/O}} = -\vec{r_{O/A}} = 2\vec{i}\,[m]$

$\vec{r_{B/O}} = 5\vec{i} + 4\vec{j}\,[m]$

$\vec{r_{B/A}} = \vec{r_{B/O}} + \vec{r_{O/A}} = 5\vec{i} - 2\vec{i} + 4\vec{j}\,[m] = 3\vec{i} + 4\vec{j}\,[m]$

OBS: $\vec{r_{B/A}} = 5\vec{u_p}\,[m]$; donde $\vec{u_p} = 0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}$

Usando la ecuación $d = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$ en el plano P y Z.

Despejamos θ: $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{d\,g}{V_0^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5 \cdot 9.8}{10^2}\right) \approx 14.67°$

$V_Z = 10\operatorname{sen}(14.67°)\ m/s = 2.53\ m/s$

$V_p = 10\cos(14.67°)\ m/s = 9.67\ m/s.$

∴ La velocidad total inicial es.

$\vec{V_{T0}} = 9.67\,\vec{u_p} + 2.53\,\vec{k}\ m/s$ ; remplazando $\vec{u_p}$

$\vec{V_{T0}} = 9.67\,(0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}) + 2.53\,\vec{k}\ m/s$

$\vec{V_{T0}} = 5.80\,\vec{i} + 7.74\,\vec{j} + 2.53\,\vec{k}\ m/s.$

$\vec{V_{T0}} = \vec{V_{d/G}} + \vec{V_{G/T}}$ , $\vec{V_{d/G}}$: Velocidad de disparo con respecto al giro.

$\vec{V_{T0}}$: Velocidad total inicial

$\vec{V_{G/T}}$: Velocidad del giro con respecto a tierra.

$\vec{V_{G/T}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 1.93\,\vec{k} \times 2\vec{i} = 3.86\,\vec{j}\ m/s$

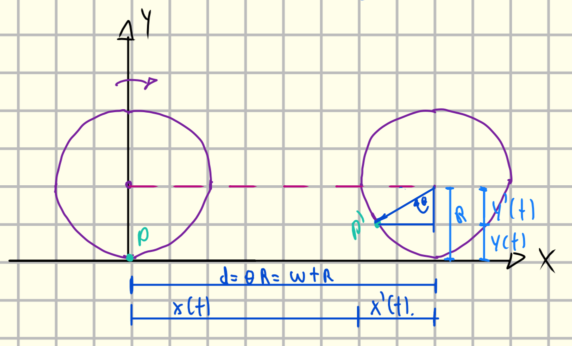
OBS: Notemos que el objeto sale disparado cuando esta posicionado en $2\vec{i}$, la velocidad es perpendicular y por tanto la velocidad $\vec{V_{G/T}}$ solo esta contenida en $\vec{j}$.

$\vec{V_{d/G}} = \vec{V_{T0}} - \vec{V_{G/T}} = 5.80\,\vec{i} + 7.74\,\vec{j} - 3.36\,\vec{j} + 2.53\,\vec{k}$

$\vec{V_{d/G}} = 5.80\,\vec{i} + 3.88\,\vec{j} + 2.53\,\vec{k}\ m/s.$ //

12. Un disco de radio $R$ rueda a lo largo de un plano horizontal sin deslizar, con velocidad angular $\omega$. Demuestre que en cada instante la velocidad de cada punto es perpendicular a la línea que une dicho punto con el punto de contacto entre el disco y el plano. Si $\rho$ es la distancia entre estos dos puntos, muestre que la rapidez del punto que se mueve es $\omega\rho$. ¿Qué conclusiones obtiene usted de estos resultados?

Primero obtengamos las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración de una partícula en el borde de la rueda




Consideremos que la partícula inicialmente se encuentra en el origen de coordenadas (0;0)

La rueda tendrá un desplazamiento $d = \theta R = \omega t R$ (1) veáse la parte inferior del gráfico

Para la posición de la partícula horizontal de la partícula esta a una distancia:

$x'(t) = R\operatorname{sen}(\omega t)$ (2)

Donde la diferencia entre (1) y (2) determina la posición horizontal de la partícula (vease otra vez la parte inferior del gráfico), por tanto

$$x(t) = d - x'(t)$$
$$= \omega t + R - R\,\text{sen}(\omega t)$$
$$x(t) = R(\omega t - \text{sen}(\omega t)) \quad (3)$$

OBS, Comunmente $\cos(\theta)$ se suele usar para la horizontal y $\text{sen}(\theta)$ para la vertical, esto se cumple cuando el ángulo esta en sentido antihorario, pero aquí lo tomamos en sentido horario, si tomamos en sentido antiorario obtenemos la ecuación:

$$X(t) = R(1 - \cos(-\omega t))$$

En la posición vertical, la rueda no varía y su centro tiene una altura constante: $R$ (4)
Sin embargo la partícula si lo hace de la forma:

$$y'(t) = R\cos(\omega t) \quad (5)$$

La diferencia de (4) y (5) resulta la posición vertical de la partícula (vease la figura, la vertical de $p'$)

$$y(t) = R - y'(t)$$
$$= R - R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R(1 - \cos(\omega t)) \quad (6)$$

OBS, Ocurre lo mismo que en el eje horizontal, $y(t)$ con respecto a un ángulo medido antihorariamente:

$$y(t) = R(1 - \text{sen}(-\omega t)) \,//$$

La posición de la partícula está dada por: $\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \text{sen}(\omega t)) \\ y(t) = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$ //

Si derivamos obtenemos la velocidad: $\begin{cases} v_x(t) = R(\omega - \omega\cos(\omega t)) \\ v_y(t) = R\omega\,\text{sen}(\omega t) \end{cases}$ //

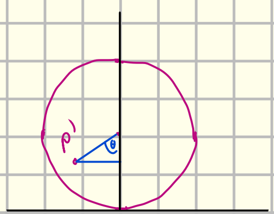
Otra vez obtenemos la aceleración: $\begin{cases} a_x(t) = R\omega^2\text{sen}(\omega t) \\ a_y(t) = R\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$ //

OBS, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (R\omega - R\omega\cos(\theta))^2 + R^2\omega^2\text{sen}^2(\theta)$

$$R^2\omega^2 - 2R^2\omega^2\cos(\theta) + R^2\omega^2\cos^2(\theta) + R\omega^2\text{sen}^2(\theta)$$
$$R^2\omega^2 - 2R^2\omega^2\cos(\theta) + R^2\omega^2$$
$$2R^2\omega^2 - 2R^2\omega^2\cos(\theta)$$
$$2R^2\omega^2(1 - \cos(\theta))$$

$$V = R\omega\sqrt{2(1 - \cos(\theta))} \,/$$

Tomemos un punto arbitrario $P'$ dentro de la rueda, donde su distancia del centro de la rueda "$L$" está acotada por $0 \leq L \leq R$, donde $R$ es el radio de la rueda.




La posicion del punto esta dado por (vease la figura 2)

$$p_x = -L\,\text{sen}(\theta) \qquad \Rightarrow \vec{p} = -L\,\text{sen}(\theta)\,\hat{i} + L(1 - \cos(\theta))\,\hat{j}$$
$$p_y = L(1 - \cos(\theta)) \qquad (L - L\cos(\theta))^2$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{L^2\text{sen}^2(\theta) + L^2 - 2L^2\cos(\theta) + L^2\cos^2(\theta)}$$
$$= L\sqrt{\text{sen}^2(\theta) + 1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)}$$
$$= L\sqrt{2 - 2\cos(\theta)} = 2\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$$

$$P = L\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$$

Si multiplicamos $\omega$ en ambos lados

$\rho\cdot\omega = L\cdot\omega\sqrt{2(1-\cos(\theta))} = V_\rho$

$\therefore V_\rho = \rho\cdot\omega$ //

$\vec{V}$ y $\vec{\rho}$ son perpendiculares $\iff \vec{V}\cdot\vec{\rho} = 0$

$\vec{V} = L\omega(1-\cos(\theta))\hat{i} + L\omega\,\text{sen}(\theta)\hat{j}$

$\vec{\rho} = -L\,\text{sen}(\theta)\hat{i} + L(1-\cos(\theta))\hat{j}$

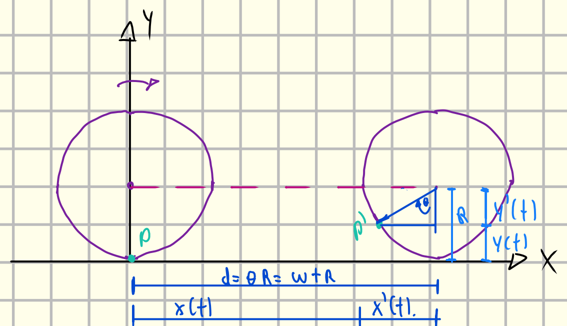
$\vec{V}\cdot\vec{\rho} = (L\omega(1-\cos(\theta))\cdot -L\,\text{sen}(\theta)) + (L\omega\,\text{sen}(\theta)\cdot L(1-\cos(\theta)))$

$= -L^2\omega\,\cancel{\text{sen}(\theta)} + L^2\omega\,\cancel{\text{sen}(\theta)}\cos(\theta) + L^2\omega\,\cancel{\text{sen}(\theta)} - L^2\omega\,\cancel{\text{sen}(\theta)}\cos(\theta)$

$= 0$ //

$\therefore \vec{V}\perp\vec{\rho}$

13. Un disco de radio $R$ rueda a lo largo de un plano horizontal sin deslizar, si el disco se traslada con rapidez constante $v_o$. Demuestre que para un punto que inicialmente estaba en contacto con el suelo, su posición respecto a su posición inicial está dada por las ecuaciones: $x(t) = R(\omega t - sin(\omega t))$, y $y(t) = R(1 - cos(\omega t))$, donde $\omega = v_o/R$ es la velocidad angular del disco y $t$ se mide desde el instante en que el punto se encuentra en contacto con el plano. Encuentre también las componentes de la velocidad y la aceleración del punto.




Consideremos que la partícula inicialmente se encuentra en el origen de coordenadas (0;0)
La rueda tendrá un desplazamiento $d = \theta R = \omega t R$ (1)
vease la parte inferior del gráfico
Pero la posición de la partícula horizontal de la partícula esta a una distancia:

$x'(t) = R\,\text{sen}(\omega t)$ (2)

Donde la diferencia entre (1) y (2) determina la posición horizontal de la partícula (vease otra vez la parte inferior del gráfico), por tanto

$x(t) = d - x'(t)$
$= \omega t R - R\,\text{sen}(\omega t)$
$x(t) = R(\omega t - \text{sen}(\omega t))$ (3)

OBS, Comunmente $\cos(\theta)$ se suele usar para la horizontal y $\text{sen}(\theta)$ para la vertical, esto se cumple cuando el ángulo esta en sentido antihorario, pero aquí lo tomamos en sentido horario, si tomamos en sentido antiorario obtenemos la ecuación:

$x(t) = R(1 - \cos(-\omega t)$

En la posición vertical, la rueda no varía y su centro tiene una altura constante: R (4)
Sin embargo la partícula si lo hace de la forma:

$y'(t) = R\cos(\omega t)$ (5)

La diferencia de (4) y (5) resulta la posición vertical de la partícula (vease la figura, la vertical de P')

$y(t) = R - y'(t)$
$= R - R\cos(\omega t)$
$y(t) = R(1 - \cos(\omega t))$ (6)

OBS, Ocurre lo mismo que en el eje horizontal, $y(t)$ con respecto a un ángulo medido antihorariamente:

$y(t) = R(1 - \text{sen}(-\omega t))$ //

La posición de la partícula está dada por: $\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \operatorname{sen}(\omega t)) \\ y(t) = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$ //

Si derivamos obtenemos la velocidad: $\begin{cases} v_x(t) = R(\omega - \omega\cos(\omega t)) \\ v_y(t) = R\omega\operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$ //

Otra vez obtenemos la aceleración: $\begin{cases} a_x(t) = R\omega^2\operatorname{sen}(\omega t) \\ a_y(t) = R\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$ //

OBS) $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (R\omega - R\omega\cos(\theta))^2 + R^2\omega^2\operatorname{sen}^2(\theta)$

$R^2\omega^2 - 2R^2\omega^2\cos(\theta) + R^2\omega^2\cos^2(\theta) + R\omega^2\operatorname{sen}^2(\theta)$

$R^2\omega^2 - 2R^2\omega^2\cos(\theta) + R^2\omega^2$

$2R^2\omega^2 - 2R^2\omega^2\cos(\theta)$

$2R^2\omega^2(1 - \cos(\theta))$

$v = R\omega\sqrt{2(1-\cos(\theta))}$ /

14. Una partícula se mueve sobre una circunferencia en el plano $xy$, con centro en el origen, de 6 m de radio. A $t_o = 0$ s la partícula pasa por el punto $(6, 0)$ m. El ángulo central barrido por su vector posición es $\theta = 0.06t^3 - 0.5t^2$ rad, donde $t$ está en segundos. Determine en el intervalo de 0 a 10 segundos, a) la magnitud del desplazamiento y b) la distancia recorrida por la partícula. R: a) 11.5 m; b) 121.7 m

(a) $\theta(t) = 0.06t^3 - 0.5t^2$

$\theta(0) = 0$ rd.

$\theta(10) = 0.06 \cdot 10^3 - 0.5 \cdot 10^2 = 10 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = \frac{1800}{\pi}° \approx 572.96° = 212.96°$

$\vec{r}(0) = 6\hat{i}$ [m].

$\vec{r}(10) = 6(\cos(212.96°)\hat{i} + \operatorname{sen}(212.96°)\hat{j}) = -4.79\hat{i} - 3.61\hat{j}$ [m]

$\vec{r}_{10/0} = -10.79\hat{i} - 3.61\hat{j}$ [m]

$|\vec{r}_{10/0}| = 11.38$ [m] //

(b) $\omega(t) = 0.18t^2 - t$

$v(t) = \omega(t) \cdot R = 1.08t^2 - 6t$

$s = \int_0^{10} |1.08t^2 - 6t|\,dt = \int_0^{5.56} (6t - 1.08t^2)\,dt + \int_{5.56}^{10} (1.08t^2 - 6t)\,dt$

$= \left[\cancel{6}^{3}\frac{t^2}{\cancel{2}} - \cancel{1.08}^{0.36}\frac{t^3}{\cancel{3}}\right]_0^{5.56} + \left[1.08\frac{t^3}{3} - \cancel{6}^{3}\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_{5.56}^{10}$

$= (92.74 - 61.88) + (298.12 - 207.26)$

$= 30.86 + 90.86 = 121.72$ [m] //

15. Una partícula se mueve por una circunferencia en sentido anti horario. Cuando $t = 0$ s pasa por el punto $A\ (150, 0)$ m, con rapidez $v_0 = 15$ m/s, si la rapidez aumenta a razón de $0.4\,s$ m/s en cada segundo, donde $s$ es la longitud del arco recorrido a partir del punto $A$ expresado en m, determine el tiempo que la partícula tarda en recorrer 20 m de longitud de arco, a partir del punto $A$. R: 1.21 s

$$USE: \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$

$$\begin{cases} v_0 = 15\,m/s \\ a = 0{,}4\,s \end{cases}$$

$$a\,ds = v\,dv$$

$$\int_0^s 0{,}4\,s\,ds = \int_{15}^{v} v\,dv$$

$$v^2 - 15^2 = 0{,}4\,s^2$$

$$v(t) = \sqrt{0{,}4s^2 + 15^2}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}.$$

$$\int_0^t dt = \int_0^{20} \frac{ds}{\sqrt{0{,}4s^2 + 15^2}}$$

Sea $u = \sqrt{0{,}4}\,s \Rightarrow du = \sqrt{0{,}4}\,ds$

$$\Rightarrow ds = \frac{du}{\sqrt{0{,}4}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{0.4}} \int_0^{20} \frac{du}{\sqrt{u^2 + 15^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.4}} \left[ \ln\left(\sqrt{0.4}\,s + \sqrt{0.4s^2 + 15^2}\right) \right]_0^{20}$$

$$t = 1{,}21\,s$$