DÍA 16 | MES 10 | AÑO 25 | NOTA /

CINEMÁTICA - HOJA DE TRABAJO 1

PREGUNTAS:

1.- Suponga que una partícula se mueve con rapidez constante. ¿Cuál de los enunciados siempre es correcto?

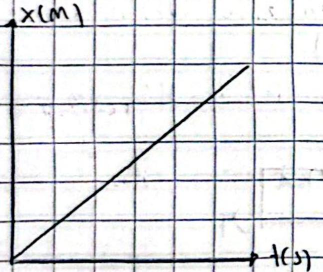
a) $\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = 0$; dado que $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$; que $\frac{dv}{dt} = 0$, ya que $v = cte$

b) $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$; no siempre se cumple, ya que $v = cte$ pero $\vec{v} = ?$

c) $\frac{d u_{\vec{v}}}{dt} = 0$; $u_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{v}$; Implica que, la dirección de $\vec{v}$ es cte; pero no dice nada del módulo.

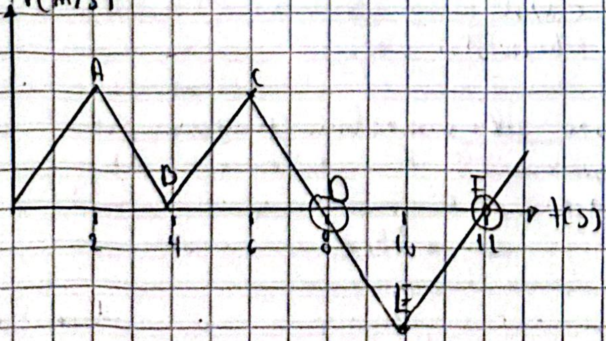
d) $\frac{d\vec{v}}{dt} = cte \neq 0$; ya que la aceleración es constante (tanto en módulo como en dirección), solo hay $\vec{a}_T$ y por tanto es un MRUV

2.- El siguiente gráfico representa la posición de una partícula con respecto al tiempo. Señale la opción correcta



a) La velocidad de la partícula crece
b) La velocidad de la partícula decrece
c) La velocidad de la partícula permanece constante
d) La aceleración de la partícula es una constante diferente de cero
e) Los módulos de la velocidad media y la velocidad instantánea son diferentes

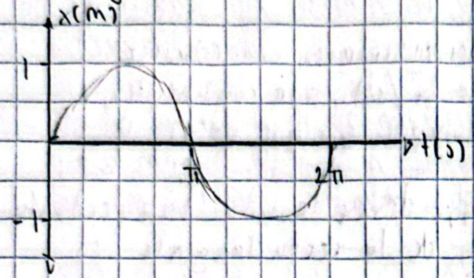
3.- Utilizando la información del siguiente gráfico de velocidad versus tiempo para un movimiento en una dimensión, si se conoce que en $t = 0\,s$, la posición del cuerpo es 2m. Determine los puntos en los cuales ocurre una inversión del movimiento, es decir, la dirección del movimiento cambia



a) A, C
b) B, D, F
c) A, C, E
d) D ; F
e) B, D

DÍA MES AÑO NOTA

4.- Considere el siguiente gráfico de posición versus tiempo para una partícula que se mueve sobre el eje x. La rapidez entre $t = 0\,s$ y $t = 2\pi\,s$ es igual a:



a) $0\,m/s$
b) $2/\pi\ m/s$
c) $1/\pi\ m/s$
d) $4/\pi\ m/s$
e) $4\,m/s$

Notemos que el recorrido de $t=0$ a $t = 2\pi\,s$ es $4\,m$, entonces

$V = S/t = 4m / 2\pi s = 2/\pi\ m/s$

5.- Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial V_0 y mientras sube experimenta una aceleración $a = -(g + kv^2)$, donde g es la magnitud de la aceleración, k es una constante (resistencia al aire) y v es la rapidez de la pelota.

a) La aceleración de la pelota es constante durante el movimiento.
b) El módulo de la aceleración es máximo inmediatamente después de que la pelota es lanzada.
c) El módulo de la aceleración es máximo cuando la pelota alcanza altura máxima.
d) En un punto intermedio durante la subida se cumple que $a = 0$.
e) El movimiento es caída libre.

6.- Suponga que un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba. Considerando la resistencia del aire al movimiento, señale en qué punto de la trayectoria la magnitud de la aceleración será menor.
a) Justo después de haber sido arrojado.
b) Justo después de alcanzar la altura máxima.
c) Justo antes de alcanzar su altura máxima.
d) Cuando regresa al punto donde fue arrojado.
e) No existe mínimo pues la aceleración es constante.

Justificación: La resistencia al aire se opone al movimiento, al subir el objeto la resistencia y gravedad tienen el mismo sentido, sin embargo, al caer tienen opuestos y la aceleración decrece.

7.- Para el movimiento de una partícula, que en cierto instante se encuentra en el punto P, se conoce que su posición es $\vec{r}$ y su velocidad $\vec{v}$, si ha partir del punto se considera un desplazamiento infitesimal $d\vec{r}$; necesariamente se cumple que

a) $\vec{v}\vec{r} = v\,d\vec{r}$: Se cumple solo si es lineal el movimiento y el origen está en la línea

DÍA | MES | AÑO | NOTA

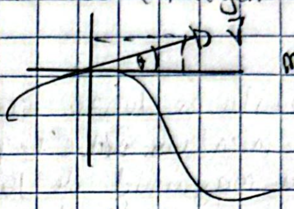
b) $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$: Solo se cumple en el movimiento circular con origen en el centro de la circunferencia

c) $\vec{r} \times d\vec{r} = 0$: Si y solo si el movimiento es radial (rectilíneo)

d) $\vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$: Implica que $\vec{v}$ y $d\vec{r}$ son perpendiculares, lo cual es una contradicción ya que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, son colineales

e) $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$: Al ser vectores colineales se cumple ya que $\sin(0) = 0$

8.- Si una partícula se mueve en el plano xy, describe una trayectoria dada por $y = f(x)$, entonces la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la trayectoria representa



$m = \tan(\theta)$

$= \frac{v_y}{v_x}$

a) la rapidez v

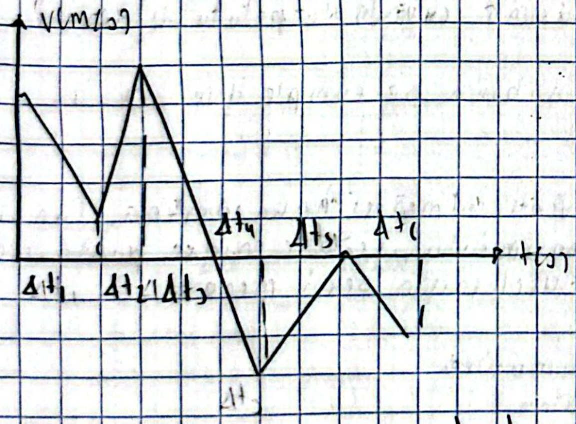
b) la velocidad $\vec{v}$

c) el unitario de la velocidad $u_{\vec{v}}$

d) la relación entre las componentes v_y/v_x.

e) ninguna de las alternativas mostradas

9.- El gráfico muestra el movimiento de una partícula sobre el eje x durante seis intervalos de tiempo. La partícula tiene un movimiento retardado (desacelerado) durante:



a) ningún intervalo

b) Δt_1, Δt_3, Δt_4

c) Δt_1, Δt_3, Δt_5

d) Δt_1, Δt_3; Δt_4; Δt_5

e) Δt_1, Δt_3, Δt_4; Δt_6

10.- Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva (no recta) en el espacio tiene una velocidad $\vec{v} = v\,\vec{u_v}$ donde v es la rapidez y $\vec{u_v}$ su dirección. Si la rapidez de la partícula permanece constante, su aceleración en cualquier instante será:

a) cero

b) constante diferente de cero.

c) $v\, d\vec{u_v}/dt$.

d) dv/dt

e) ninguna de las alternativas mostradas

$$\vec{v} = v\,\vec{u_v}$$

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}\,\vec{u_v} + v\,\dot{\vec{u_v}} = v\,\frac{d\vec{u_v}}{dt}$$

DÍA MES AÑO NOTA

11.- Considere una partícula que se mueve bajo la acción de una aceleración constante diferente de cero:

d) El plano que definen su velocidad y aceleración es el plano de la trayectoria

12.- Desde lo alto de un edificio se abandona un cuerpo de tal manera que se mueve durante n segundos, la rapidez media del cuerpo durante los dos últimos segundos de su movimiento es:

$x(n) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot n^2 \quad \wedge \quad x(n-2) = \frac{1}{2} \cdot g\,(n-2)^2$

$\bar{v} = \frac{x(n) - x(n-2)}{2} = g \cdot \frac{1}{4}\left[n^2 - n^2 + 4n - 4\right]$

$\bar{v} = g(n-1)$

13.- Un paracaidista en caída libre alcanza una rapidez de 20 m/s cuando abre su paracaídas y su aceleración pasa a ser $(9.8 - 0.4v)\ m/s^2$, donde v es la rapidez del paracaidista en m/s, en ese instante, el movimiento del paracaidista es hacia:

b) Abajo acelerado

14.- Una partícula se mueve sobre el eje x de acuerdo con la relación $v_x = \sqrt{A - Bx^2}\ m/s$, donde A y B son constantes positivas, y x la posición en m. La aceleración de la partícula

$a_x = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{A - Bx^2}} \cdot v_x$

$a_x = \frac{-2x}{\sqrt{A - \cancel{B}x^2}} \cdot \sqrt{A - \cancel{B}x^2} = -2x$

c) Varía linealmente con la posición

15.- Una partícula se mueve en el plano xy sobre la curva $y = x - x^2/4$, donde x y y están en m, tiene la componente en x de su velocidad $v_x = 4\ m/s$ constante. En $x = 1\ m$, la rapidez de la partícula es:

$v_y = v_x - \frac{2x\,v_x}{4} = v_x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

$v_y = 4\ m/s\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2\ m/s$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$

$v = 2\sqrt{5}\ m/s = \sqrt{20}\ m/s$

DÍA MES AÑO NOTA /

PROBLEMAS I

1.- Dos autos A y B, se mueven en línea recta en la misma dirección. Cuando $t=0s$, sus velocidades respectivas son 1 ft/s y 3 ft/s, y sus respectivas aceleraciones son $2\ ft/s^2$ y $1\ ft/s^2$. Si el auto A se encuentra a 1.5 ft delante del auto B cuando $t=0$, determine en qué instante (s) se encontrarán los autos lado a lado.

$$x_A(t) = 1.5 + 1 \cdot t + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} t^2 = 1.5 + t + t^2$$

$$x_B(t) = 3t + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2 = 3t + \frac{t^2}{2}$$

Cuando $x_A(t) = x_B(t)$ en un $t>0$ se encontrarán

$$1.5 + t + t^2 = 3t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 2t + 1.5 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$(t-1)(t-3)=0 \Rightarrow t_1 = 1$ y $t_2 = 3$ se encontrarán //

2.- Un cuerpo cae libremente a partir del reposo. Demuestre que la distancia que recorre durante el enésimo segundo es $(n - 1/2)g$

$$x(n) = \frac{1}{2} g \cdot n^2 ; \quad x(n-1) = \frac{1}{2} g (n-1)^2 = \frac{1}{2} g (n^2 - 2n + 1)$$

$$d = x(n) - x(n-1) = \frac{1}{2} g (\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 2n - 1)$$

$$d = \frac{1}{2} g (2n - 1) = (n - 1/2) g \ //$$

3.- Dos proyectiles A y B se lanzan hacia arriba con 2 s de intervalo, el primero con una velocidad de 50 m/s y el segundo con una velocidad de 80 m/s. a) Determine el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren a la misma altura

$$50(t+2) - 4.9(t+2)^2 = 80t - 4.9t^2$$

$$50t + 100 - \cancel{4.9t^2} - 19.6t - 19.6 = 80t - \cancel{4.9t^2}$$

$$80.4 = 49.6t$$

$\Rightarrow t = 1.62s \quad \therefore t = 3.62$

b) ¿A qué altura sucederá?

$\Delta y = 50 \cdot 3.62s - 4.9 \cdot 3.62^2 = 116.79m$

DÍA MES AÑO NOTA /

c) ¿Qué velocidad tendrá cada una en ese momento?

$v_A = 50\ m/s - 9.8 \cdot 3.62 = 14.52\ m/s$

$v_B = 80\ m/s - 9.8 \cdot 1.62 = 64.12\ m/s$

4.- Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio con una velocidad de 29.4 m/s. Otra piedra se deja caer 4s después de la primera. Demuestre que la primera piedra pasará a la segunda exactamente 4s después de que se soltó la primera.

$29.4(8) - 4.9(8)^2 = -4.9(4)^2$

$-78.4 = -78.4$ en $t=8$ las piedras se encuentran

$29.4 - 9.8(8) = -49\ m/s = v_A(8)$

$-9.8(4) = -39.2\ m/s = v_B(8)$

Dado que $x_A(8) = x_B(8)$ y $v_A(8) > v_B(8)$, la primera piedra (A) pasará a la segunda (B) en 8 segundos.

5.- De la base de un barranco, un cohete de juguete es propulsado desde $t=0\ s$ con una aceleración $a(t) = a_0 - a_1 t$, donde a_0 y a_1 son constantes positivas. Simultáneamente, en $t=0\ s$, una piedra es liberada desde lo alto del barranco a una altura h respecto a la base de este. Si se conoce que la piedra golpea al cohete cuando el cohete alcanza su máxima altura, determine la expresión para la altura h en términos de constantes a_0, a_1 y g, donde g es la aceleración gravitacional. Desprecie por completo la resistencia al aire.

$a(t) = a_0 - a_1 t$

$v(t) = a_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2$

Se alcanza h_{max} cuando $v(t) = 0$, entonces

$a_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2 = 0$

$t(a_0 - \frac{1}{2} a_1 t) = 0$

$t_1 = 0$

$t_2 = \frac{2a_0}{a_1}$

$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{1}{6} a_1 t^3$

$x(t) = t^2 \left[\frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{6} a_1 t\right]$

$h_{max} = \left(\frac{2a_0}{a_1}\right)^2 \left[\frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{6} \cdot a_1 \cdot \frac{2a_0}{a_1}\right]$

$h_{max} = \frac{4a_0^2}{a_1^2} \left[\frac{1}{2} a_0 - \frac{a_0}{3}\right]$

$h_{max} = \frac{4a_0^2}{a_1^2} \left(\frac{a_0}{6}\right)$

$h_{max} = \frac{2a_0^3}{3a_1^2}$

DÍA MES AÑO NOTA

Sabemos que la piedra cae de tal forma que:

$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

$h_{max} = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{2a_0}{a_1}\right)^2$

$\frac{2a_0^3}{3a_1^2} = h - \frac{1}{2} g \cdot \frac{4a_0^2}{a_1^2}$

$\frac{2a_0^3}{3a_1^2} = h - 2g\frac{a_0^2}{a_1^2}$

$h = \frac{2a_0^3}{3a_1^2} + 2g\frac{a_0^2}{a_1^2}$

$h = \frac{2a_0^2}{a_1^2}\left[\frac{a_0}{3} + g\right]$ //

6.- La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, donde x se expresa en m y t en s. Determine en el intervalo de 0 a 6 s.

a) los intervalos de tiempo durante los cuales el movimiento es acelerado, retardado

$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$

$v = 3t^2 - 12t - 15$

$a = 6t - 12$

$3t^2 - 12t - 15 = 0$

$t^2 - 4t - 5 = 0$

$(t-5)(t+1) = 0$

$v(5) = 0$

$6t - 12 = 0$

$t = 2$

t		2 s		5 s		6 s
v	←	←	←	→	→	→
a	←	←	→	→	→	→

Acelerado: de $t = 0$ a $t = 2$

de $t = 5$ a $t = 6$

Retardado: de $t = 2$ a $t = 5$

b) la distancia recorrida por la partícula

$d = \int_0^6 |v| dt = \int_0^6 |3t^2 - 12t - 15| dt = \int_0^5 (-3t^2 + 12t + 15) dt + \int_5^6 (3t^2 - 12t - 15) dt$

$d = [-t^3 + 6t^2 + 15t]_0^5 + [t^3 - 6t^2 - 15t]_5^6$

$d = -5^3 + 6 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 6^3 - 5^3 - 6 \cdot 6^2 + 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 6 + 15 \cdot 5$

$d = 100\,m + 10\,m = 110\,m$ //

DÍA MES AÑO NOTA

7.- La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $a_x = 4 - t^2$, donde a_x se encuentra en m/s^2 y t en segundos. Encuentre las expresiones de la velocidad y la posición en función del tiempo, suponiendo que para $t = 3\,s$, $v_x = 2\,m/s$ y $x = 9\,m$

$a_x = 4 - t^2 \Rightarrow v_x = 4t - \frac{t^3}{3} + C_1$, sabemos que $v_x(3) = 2\,m/s$, entonces

$$v(3) = 4 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} + C_1 = 2$$

$$= 12 - 9 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = -1$$

$v_x(t) = 4t - \frac{t^3}{3} - 1\ m/s$ //

$x(t) = 2t^2 - \frac{t^4}{12} - t + C_1$

$x(3) = 2 \cdot 9 - \frac{81}{12} - 3 + C_1 = 9 \Rightarrow C_1 = 0.75$

$x(t) = 2t^2 - \frac{t^4}{12} - t + 0.75$ //

8.- Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición está dada por la ecuación $x = 2 + 3t - 4t^2$, con x en metros y t en segundos. Determine

a) El instante cuando cambia de dirección el movimiento.

$v = 3 - 8t$, cuando $v(t_a) = 0$, la dirección del movimiento cambiará $t_a > 0$.

$3 - 8t = 0$; $t = 3/8 = 0.375\,s$ //

b) Su velocidad cuando regresa a la posición que tenía en $t = 0\,s$

$x(0) = 2\,m$; !!

$x(t) = 2\,m = 2 + 3t - 4t^2$; $-4t^2 + 3t = 0$

$t(4t - 3) = 0 \Rightarrow t_2 = 0.75\,s$

$v(0.75\,s) = 3 - 8 \cdot \frac{3}{4} = -3\,m/s$ //

9.- Una partícula parte del reposo en el origen y experimenta una aceleración $a_x = \frac{k}{(x+4)^2}$, con a en m/s^2, x en metros y k es una constante. Si se sabe que la velocidad de la partícula es $4\,m/s$ cuando $x = 8$, determine

a) el valor de k

$v\,dv = a\,dx$ $\quad v\,dv = \frac{k}{(x+4)^2}dx$; $\frac{v^2}{2} = k \cdot -\frac{1}{x+4} + C_1$

$v(x) = \sqrt{C_1 - \frac{2k}{x+4}}$; ya que parte del reposo

$v(0) = 0 = \sqrt{C_1 - \frac{2k}{4}} \Rightarrow C_1 = k/2$, así

$v(x) = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{2k}{x+4}} = \sqrt{\frac{k(x+4) - 4k}{2(x+4)}} = \sqrt{\frac{kx}{2(x+4)}}$

DÍA | MES | AÑO | NOTA /

Por hipótesis $v(8)=4$, así

$v(8)=\sqrt{\frac{8K}{24}}=4$; despejamos $K \Rightarrow K=48$ //

b) La posición de la partícula cuando $v_x = 4.5$ m/s

$$v(x)=\sqrt{\frac{24x}{x+4}}=4.5$$

$24x = 20.25(x+4)$

$24x = 20.25x + 81$

$3.75x = 81 \Rightarrow x = 21.6$ m

c) La velocidad máxima de la partícula

Como la velocidad solo crece con respecto a la posición

$$v_{max} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{24x}{x+4}} = \sqrt{24} \text{ m/s} //$$

10.- Una partícula realiza un movimiento acelerado unidimensional con $a=\frac{1+v^2}{v}$, $v>0$. Si en $t=0$s la partícula se encuentra en el origen de coordenadas moviéndose con $v=1$ m/s, encuentre:

a) La velocidad en función del tiempo

$\frac{v}{v^2+1}dv = dt$; $\frac{1}{2}\int\frac{2v}{v^2+1} = \int dt$

$\frac{1}{2}\ln(v^2+1) = t + C_1 \Rightarrow v^2+1 = e^{2t+C_1'}$

$v(t)=\sqrt{e^{2t}\cdot e^{c}-1}$, como $v(0)=1 \Rightarrow C_1' = \ln(2)$

$\therefore v(t) = \sqrt{2e^{2t}-1}$ //

b) La aceleración cuando $t=0$

$v(0)=\sqrt{1}=1$; $a(t) = 4e^{2t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2e^{2t}-1}}$

$a(0) = 2$ m/s^2 //

$a(t) = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{2e^{2t}-1}}$

$a(0) = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{2-1}} = 2$ m/s^2 //

DÍA | MES | AÑO | NOTA

11.- Un proyectil atraviesa horizontalmente una pared vertical homogénea de espesor d. El proyectil ingresa a la pared con rapidez v_0 y sale con rapidez v_f. La desaceleración que se produce al interior de la pared es $a = -Kv^2$, donde v es la rapidez del proyectil. Determine el valor de K y el tiempo que demorará el proyectil en atravesar dicho medio

Sabemos que

$v\,dv = a\,dx$, remplazando.

$v\,dv = -Kv^2\,dx$

$v^{-1}dv = -K\,dx$, integramos

$$\int_{v_0}^{v_f} v^{-1}dv = -K\int_0^d dx$$

$\ln(v_f) - \ln(v_0) = -Kd$

$K = \ln(v_0/v_f)\cdot 1/d$ //

$a = -Kv^2$

$v^{-2}dv = -K\,dt$

$-v^{-1} = -Kt + C_1$

$v(t) = \dfrac{1}{Kt + C_1}$

Por hipótesis $v(0) = v_0$

$v(0) = \dfrac{1}{C} \Rightarrow C = \dfrac{1}{v_0}$

$v(t) = \dfrac{v_0}{Ktv_0 + 1}$

En un $t_a > 0$; $v(t_a) = v_f$

$v_f = \dfrac{v_0}{Kt_a v_0 + 1} \Rightarrow v_f K t_a v_0 + v_f = v_0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 - v_f}{v_0 \cdot v_f}\cdot\dfrac{1}{K}$

Remplazando $t = \dfrac{v_0 - v_f}{v_0 \cdot v_f}\cdot\dfrac{d}{\ln(v_0/v_f)}$ //

12.- Se dispara un proyectil verticalmente hacia abajo en un medio fluido con una velocidad inicial de 60 m/s. Debido a la resistencia del fluido, el proyectil experimenta una aceleración $-0.4v^3$, donde v está en m/s. Determine la velocidad del proyectil y su posición 4 s después del disparo

$a = -0.4v^3$

$v^{-3}dv = -0.4\,dt$

$-\frac{1}{2}v^{-2} = -0.4t$

$v^{-2} = 0.8t + C_1$

$\dfrac{1}{v^2} = 0.8t + C_1$

$v = \sqrt{\dfrac{1}{0.8t + C_1}}$

como en $t = 0$ $v = 60$

$v(0) = \sqrt{\dfrac{1}{0.8\cdot 0 + C_1}} = 60$

$\sqrt{\dfrac{1}{C}} = 60 \Rightarrow C = \dfrac{1}{3600}$

$v(t) = \sqrt{\dfrac{1}{0.8t + 1/3600}} = \sqrt{\dfrac{3600}{2880t + 1}}$

$v(4) = 0.559$

DÍA MES AÑO NOTA /

$$v(t) = \sqrt{\frac{3600}{2880t+1}}$$

$$x(t) = \int \sqrt{\frac{3600}{2880t+1}}\,dt = 60\int \frac{dt}{\sqrt{2880t+1}}$$

Sea $u = 2880t+1 \Rightarrow du = 2880\,dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2880}$

Remplazando

$$x(t) = 60\int u^{-1/2}\cdot\frac{du}{2880} = \frac{1}{48}\cdot 2u^{1/2} + C_1$$

$$x(t) = \frac{1}{24}\sqrt{2880t+1} + C_1$$, como parte del origen $C_1 = 0$.

$$x(t) = \frac{1}{24}\sqrt{2880t+1}$$

$$x(4) = \frac{1}{24}\sqrt{2880\cdot 4+1} = 4.47\,m$$

13.- Una bala en forma cónica golpea un material de empacamiento con una velocidad v_0 como se muestra en la figura. La aceleración de la bala dentro del material se describe por la ecuación $a = g - cy^2$, donde c es una constante positiva y y es la distancia que penetra el material. Si la profundidad máxima de penetración observada es y_m, determine el valor de la constante c.

$$v\,dv = a\,dy$$

$$v\,dv = (g - cy^2)\,dy$$

$$\int_{v_0}^{0} v\,dv = \int_0^{y_m} (g - cy^2)\,dy$$

$$-\frac{v_0^2}{2} = \left[gy - \frac{cy^3}{3}\right]_0^{y_m}$$

$$-\frac{v_0^2}{2} = gy_m - \frac{c}{3}y_m^3$$

$$\frac{v_0^2}{2} + gy_m = \frac{c}{3}y_m^3$$

$$c = \frac{3}{y_m^3}\left(gy_m + \frac{v_0^2}{2}\right)$$

DÍA MES AÑO NOTA

14.- Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 y experimenta una aceleración $a = -(g + Kv^2)$, donde g es la magnitud de la aceleración de la gravedad, K es una constante y v es la rapidez de la pelota. De ser necesario puede asumir como conocido el resultado de la integral: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

Determine la altura máxima que alcanza la pelota y el tiempo de subida

$a = -(g + Kv^2)$

Sea $dy = \frac{v\,dv}{a}$

Remplazando

$dy = \frac{v\,dv}{-(g+Kv^2)}$

$\int -dy = \int \frac{v}{g+Kv^2}\,dv$

Sea $u = g + Kv^2 \Rightarrow du = 2Kv\,dv$

$\Rightarrow dv = \frac{du}{2vK}$

$-\int_0^{y_{max}} dy = \int_{Kv_0^2}^{g} \frac{v}{u}\cdot\frac{du}{2vK}$

$-y_{max} = \frac{1}{2K}\left[\ln(g+Kv^2)\right]_{v_0}^{0}$

$-y_{max} = \frac{1}{2K}\left(\ln(g) - \ln(g+Kv_0^2)\right)$

$y_{max} = \frac{1}{2K}\ln\left(\frac{g+Kv_0^2}{g}\right)$ //

$a = -(g + Kv^2)$

$\frac{dv}{g+Kv^2} = -dt$

$\frac{dv}{K(g/K+v^2)} = -dt$

$\frac{1}{K}\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{g/K+v^2} = -\int_0^t dt$

$\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{g/K}}\left[\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{g/K}}\right)\right]_{v_0}^{0} = -t$

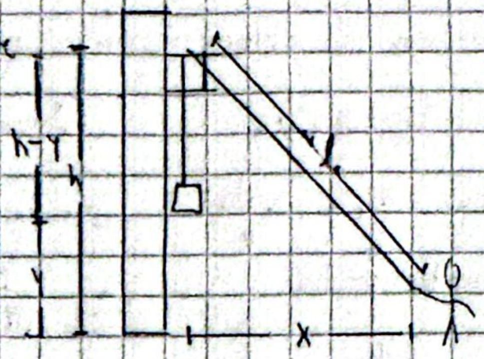
$\frac{1}{\sqrt{Kg}}\cdot\arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{g/K}}\right) = t$

$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{Kg}}\arctan\left(\sqrt{\frac{K}{g}}\,v_0\right)$ //

DÍA MES AÑO NOTA

15.- Con el fin de proteger su alimento de niños hambrientos un niño eleva su paquete de comida con una cuerda que lanza sobre la rama de un árbol de altura h. El niño camina alejándose de la cuerda vertical con velocidad constante de magnitud v_0 mientras sostiene en sus manos el extremo libre de la cuerda.

a) Demuestre que la rapidez v del paquete de comida es $x(x^2+h^2)^{-1/2} v_0$, donde x es la distancia que el niño ha caminado alejándose de la cuerda vertical.



Sea Δy distancia entre la rama y el paquete, que disminuye con respecto al tiempo, tal que

$$v_y = -\frac{dy}{dt}$$

$L = l + \Delta y$, con $L = cte$

por teorema de Pitágoras l:

$l = \sqrt{x^2+h^2}$, remplazando

$L = \sqrt{x^2+h^2} + \Delta y$, derivamos con respecto al tiempo

$$0 = 2x v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} - v_y$$

Despejamos v_y

$$v_y = x(x^2+h^2)^{-1/2} v_0 \quad //$$

Obs: $\Delta y = h - y$

$$\frac{d\Delta y}{dt} = -v_y$$

b) Demuestre que la aceleración "a" del paquete de comida es $h^2(x^2+h^2)^{-3/2} v_0^2$

La aceleración del paquete es dv/dt:

$v_y = \frac{x v_0}{\sqrt{x^2+h^2}}$, derivando

$$a = \frac{v_0^2 \cdot (x^2+h^2)^{1/2} - x v_0 \cdot 2x v_0 \cdot 1/2 (x^2+h^2)^{-1/2}}{x^2+h^2}$$

$$a = \frac{v_0^2 (x^2+h^2)^{1/2} - x^2 v_0^2 (x^2+h^2)^{-1/2}}{x^2+h^2}$$

$$a = \frac{v_0^2 (x^2+h^2) - x^2 v_0^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

$$a = \frac{\cancel{v_0^2 x^2} + v_0^2 h^2 - \cancel{x^2 v_0^2}}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

$$a = h^2 (x^2+h^2)^{-3/2} v_0^2 \quad //$$

DÍA MES AÑO NOTA

16.- Un proyectil se dispara en tal forma que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima, ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento inicial?

$V_0 \Rightarrow V_{0x} = V_0 \cos(\theta)$

$V_{0y} = V_0 \sen(\theta)$

Cuando $V_y = 0$, en un $t_a > 0$, tal que

$V_{0y} - g \cdot t_a = 0 \Rightarrow t_a = V_{0y}/g$

Además que

$2 \cdot V_{0x} \cdot t_a = 3d \quad \wedge \quad V_{0y} \cdot t_a - \frac{1}{2} g \cdot t_a^2 = d$

$V_{0x} \cdot t_a = \frac{3}{2}\left[V_{0y} \cdot t_a - \frac{1}{2} g \cdot t_a^2\right]$

$V_{0x} \cdot \frac{V_{0y}}{g} = \frac{3}{2}\left[V_{0y} \cdot \frac{V_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{V_{0y}^2}{g^2}\right]$

$V_{0x} \cdot V_{0y} = \frac{3}{2}\left[V_{0y}^2 - \frac{1}{2} V_{0y}^2\right]$

$V_{0x} = 3/2 \cdot V_{0y} - 3/4\, V_{0y}$

$V_{0x} = 3/4\, V_{0y}$

$V_0 \cos(\theta) = 3/4\, V_0 \sen(\theta)$

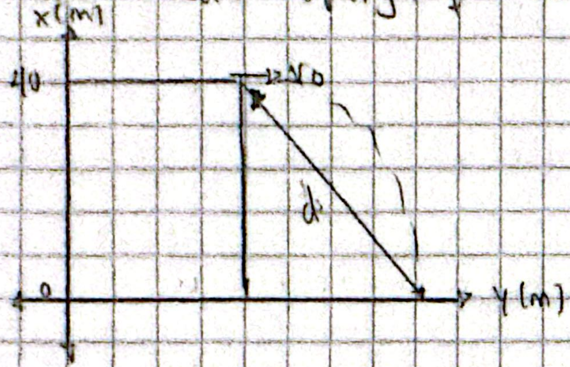
$\tan(\theta) = 4/3$

$\theta = \tan^{-1}(4/3)$

$\theta = 53.13°$ //

DÍA | MES | AÑO | NOTA /

17.- Un jugador de futbol patea una roca horizontalmente de un montículo de 40m de alto en un estanque. Si el jugador escucha el sonido del chapoteo 3s después, ¿Cuál es la rapidez inicial dada a la roca? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es 343 m/s



$$t_v = t_b + t_s$$

$$3 = t_b + t_s$$

$$-40m = -\frac{1}{2} g \cdot t_b^2$$

$$t_b = 2.857s$$

$$\Rightarrow t_s = 3 - 2.857 = 0.143 s$$

$$d = 343 m/s \cdot 0.143 s = 49.049 m$$

$$x = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{(49.049 m)^2 - (40m)^2} = 28.387 m$$

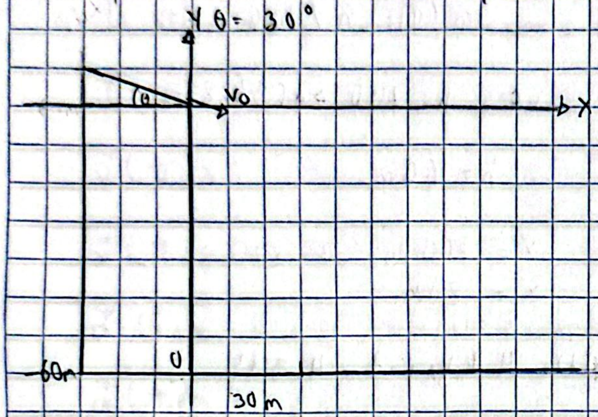
$$v_x = cte = \frac{28.387 m}{2.857 s} = 9.94 m/s$$

18.-

DÍA | MES | AÑO | NOTA

18.- Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30° con la horizontal y al llegar a su extremo queda en libertad con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es 60 m y el ancho de la calle a la que vierte el tejado 30m. Determine

a) Las ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad y la ecuación de la trayectoria



$V_0 = 10\,m/s$

$V_{0x} = 10\,m/s \cos(30°) = 5\sqrt{3}\ m/s$

$V_{0y} = 10\,m/s \operatorname{sen}(30°) = 5\ m/s$

$\vec{V_0} = 5\sqrt{3}\,\vec{i} - 5\,\vec{j}\ m/s$

$x(t) = 5\sqrt{3}\,t$

$y(t) = -5t - 4.9t^2$

$\Rightarrow t = x/5\sqrt{3}$

$r(t) = 5\sqrt{3}\,t\,\vec{i} - 5t\,\vec{j} - 4.9t^2\,\vec{j}$

$r(t) = t(5\sqrt{3}\,\vec{i} - 5\vec{j}) - 4.9t^2\,\vec{j}$ //

$v(t) = 5\sqrt{3}\,\vec{i} - (5 + 9.8)\,\vec{j}\ m/s$ //

$a(t) = -9.8\,\vec{j}\ m/s^2$ //

Remplazo en y(t)

$y(x) = -5 \cdot \frac{x}{5\sqrt{3}} - 4.9 \cdot \frac{x^2}{75}$

$y(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4.9x^2}{75}$

$y(x) = -0.577x - 0.065x^2$ //

b) ¿Llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta?

$-5t - 4.9t^2 = -60$

$4.9t^2 + 5t - 60 = 0$

$t = 3.026\,s$

$x(3.026) = 26.206\,m < 30\,m$

¿Llegará directamente al suelo.

c) La posición en la que se encuentra cuando su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal.

$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x}$; $v_x = cte \Rightarrow v_y = v_x \tan(\theta)$

$v_y = 5\sqrt{3}\tan(315°)\ m/s$

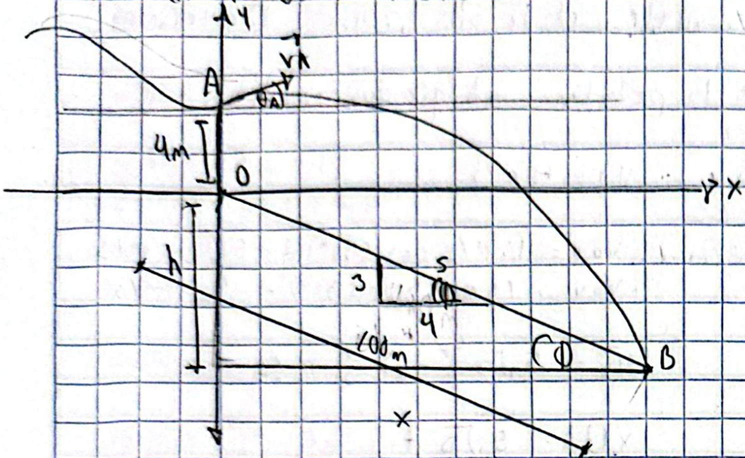
$v_y = -5\sqrt{3}\ m/s$

$v(t) = v_y = -5\sqrt{3} = -5 - 9.8t \Rightarrow t = 0.373\,s$

$x(0.373) = 3.23\,m$; $y(0.373) = -2.547\,m$

$r(0.373) = 3.23\,\vec{i} - 2.55\,\vec{j}\ m$

19.- Se observa que el esquiador deja la rampa A con un ángulo $\theta_A = 25°$. Si golpea en B, determine la rapidez inicial v_A y el tiempo que toma en ir de A hasta B.



$\phi = \operatorname{sen}^{-1}(3/5)$

$\phi = 36.87°$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\phi) = h/100$

$\Rightarrow h = 100 \operatorname{sen}(36.87°)$

$h = 60m$

$x = 100 \cos(36.87°)$

$x = 80m$

$v_{Ax} = 80/t$

$\tan(25°) = \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = v_{Ay} \cdot \frac{t}{80}$

$\Rightarrow t = \frac{80 \tan(25°)}{v_{Ay}}$

$t = 37.30 / v_{Ay}$

$v_{Ax} = \frac{v_{Ay}}{\tan(25°)} = 17.58 m/s$

$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = 19.40 m/s$ //

$t = 80/v_{Ax} \Rightarrow t = 80/17.57 = 4.55 s$ //

$y(t) = 4 + v_{Ay} \cdot t - 4.9t^2$

$-60 = 4 + v_{Ay} \cdot t - 4.9t^2$

$-64 = v_{Ay} \cdot t - 4.9t^2$

$-64 = v_{Ay} \cdot \frac{37.30}{v_{Ay}} - 4.9 \cdot \left(\frac{37.30}{v_{Ay}}\right)^2$

$101.3 = 4.9 \cdot \frac{37.30^2}{v_{Ay}^2}$

$\Rightarrow v_{Ay} = 8.20 m/s$

20.- Una partícula se mueve en el espacio con una velocidad dada por: $\vec{v} = e^t\,\vec{i} + mt^2\,\vec{j} - 1/3 \cdot t^3\,\vec{k}$ m/s, siendo m una constante. Calcule el vector posición en función de t, sabiendo que en el instante t = 0 s, la partícula se encuentra en (0; 0; 1) m

$v_x = e^t \Rightarrow x(t) = e^t + C_1$, como $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -1$

$x(t) = e^t - 1$

$v_y = mt^2 \Rightarrow y(t) = \frac{m}{3}t^3 + C_2$, como $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$y(t) = m/3 \cdot t^3$ //

$v_z = -1/3 \cdot t^3 \Rightarrow z(t) = -1/12\, t^4 + C_3$, como $z(0) = 1 \Rightarrow C_3 = 1$

$z(t) = -\frac{1}{12}t^4 + 1$

$\vec{r} = (e^t - 1)\vec{i} + m \cdot \frac{t^3}{3}\vec{j} + \left(-\frac{1}{12} \cdot t^4 + 1\right)\vec{z}$ //

21.- La posición de una partícula está dada por la función

$\vec{r} = 2\,sen(2t)\vec{i} + \frac{1}{2}\cos(2t)\vec{j}$ m. Determine.

a) la velocidad y la aceleración para $t = \pi/3$ s.

$\vec{v}(t) = 4\cos(2t)\vec{i} - sen(2t)\vec{j}$ [m/s.]

$\vec{v}(\pi/3) = 4 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\vec{i} - sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\vec{j}$ [m/s]

$\vec{v}(\pi/3) = -2\vec{i} - 0.87\vec{j}$ m/s. //

$\vec{a}(t) = -8\,sen(2t)\vec{i} - 2\cos(2t)\vec{j}$ [m/s²]

$\vec{a}(\pi/3) = -6.93\vec{i} + 1.00\vec{j}$ m/s² //

22.- Un punto se está moviendo con una rapidez constante de 3 ft/s. La velocidad tiene una dirección tal que hace un ángulo de $(\pi/2)t$ radianes con el eje positivo de las x. Si $x = y = 0$ ft cuando $t = 0$ s. encuentre la ecuación de la trayectoria de la partícula

$v(t) = 3,\ (\pi t/2)$

$\Rightarrow v_x = 3\cos(\pi t/2)$

$v_y = 3\,sen(\pi t/2)$

Integramos

$x(t) = 3 \cdot \frac{2}{\pi}\,sen(\pi t/2)$

$x(t) = \frac{6}{\pi}\,sen(\pi t/2) + C_1$

Como $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(t) = -\frac{6}{\pi}\cos(\pi t/2) + C_2$

Como $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 6/\pi$

Despejo $sen(\pi t/2)$ y $\cos(\pi t/2)$

$\frac{\pi}{6}x = sen(\pi t/2)$

$(\pi/6)^2 x^2 = sen^2(\pi t/2)$

$-(6/\pi - y) \cdot \pi/6 = \cos(\pi t/2)$

$(6/\pi - y)^2 \cdot (\pi/6)^2 = \cos^2(\pi t/2)$

Sumamos. $sen^2(\pi t/2) + \cos^2(\pi t/2) = 1$

$(\pi/6)^2 x^2 + (\pi/6)^2(6/\pi - y)^2 = 1$

$x^2 + (y - 6/\pi)^2 = (6/\pi)^2$ //

DÍA MES AÑO NOTA

23.- La velocidad de una partícula está dada por $\vec{v} = t\vec{i} + \sqrt{2t}\vec{j} + \vec{k}$ m/s, donde el tiempo t está dado en segundos. Determine el desplazamiento y la distancia recorrida para la partícula de 0 a 10 segundos

$$\vec{r} = \int_0^{10} \vec{v}\,dt = \int_0^{10} (t\vec{i} + (2t)^{1/2}\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{r} = \left[t^2/2\,\vec{i} + 1/3 \cdot (2t)^{3/2}\vec{j} + t\vec{k} \right]_0^{10}$$

$$\vec{r} = 50\vec{i} + 29.814\vec{j} + 10\vec{k} \text{ m}$$

$$|\vec{r}| = 59.067 \text{ m}$$

$$d = \int_0^{10} |\vec{v}|\,dt = \int_0^{10} \sqrt{t^2 + 2t + 1}\,dt = \int_0^{10} (t+1)\,dt$$

$$d = \left[t^2/2 + t \right]_0^{10} = 50 + 10 = 60 \text{ m}$$

24.- Una partícula se mueve de derecha a izquierda, sobre la trayectoria $y = x^2/2 - 2x + 5$, tiene la componente en x de su velocidad constante e igual a 4 m/s. Determine para $x = 1$, la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula.

$$y = \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \;;\; v_y = x v_x - 2 v_x \;;\; \text{como } v_x = cte = 4$$

$$v_y = 4x - 8 \;;\; v_y(1) = 4 - 8 = -4 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}(1) = 4\vec{i} - 4\vec{j} \text{ m/s}$$

$$a_y = 4\,\dot{x} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = 16\vec{j} \text{ m/s}^2 = cte \Rightarrow \vec{a}(1) = 16\vec{j} \text{ m/s}^2$$

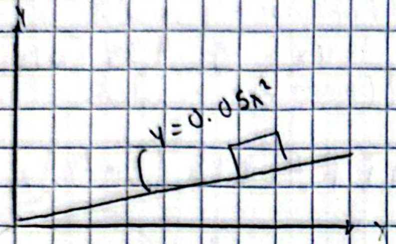
$$y(1) = \frac{1}{2} - 2 + 5 = 3.5 \text{ m}$$

$$\vec{r}(1) = 1\vec{i} + 3.5\vec{j} \text{ m}$$

Scanned with CamScanner

DÍA | MES | AÑO | NOTA /

25.- Una caja se desliza por la pendiente dada por $y = 0.05x^2$ m, donde x está en metros. Si la componente en x de la velocidad y de la aceleración de la caja son $v_x = -3$ m/s y $a_x = -1.5$ m/s², respectivamente, cuando $x = 5$ m, determine las componentes en y de la velocidad y la aceleración en ese instante



$y = 0.05x^2$

$v_y = 0.10\, x\, v_x$

$v_y(5) = 0.10 \cdot 5 \cdot -3$

$v_y(5) = -1.5\ m/s$ //

$a_y = 0.10 \cdot v_x$

$a_y(5) = 0.10 \cdot -1.5\ m/s^2 = -0.15\ m/s^2$ //

26.- Una persona es lanzada sobre la cabeza de una persona ubicada a una distancia d horizontal. La pelota es lanzada con una rapidez v_0 m/s y un ángulo θ rad con respecto a la horizontal. En el momento en que la pelota es lanzada, la persona empieza a correr con una aceleración variable cuya componente en el eje x está dada por $2a_0t$, donde a_0 es una constante positiva. La persona atrapa la pelota a exactamente la misma altura de donde fue lanzada. Asuma que la resistencia al aire es despreciable y que la magnitud de la aceleración de la gravedad está dada por g. Determine la distancia D sobre el eje x que recorre la persona desde el lanzamiento de la pelota hasta que la atrapa

$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}(\theta)$

$V_{0x} = V_0 \cos(\theta)$

$y(t) = v_0 \operatorname{sen}(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$t\,(v_0 \operatorname{sen}(\theta) - 1/2 \cdot g \cdot t) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0$

$v_0 \operatorname{sen}(\theta) - 1/2 \cdot g \cdot t = 0$

$t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}(\theta)}{g}$

$a_x(t) = 2a_0 t$

$v_x(t) = 2 \cdot a_0 \cdot \frac{t^2}{2} + \cancel{C_1}^{0}$

$v_x(t) = a_0 \cdot t^2$

$x(t) = a_0 \cdot \frac{t^3}{3}$

$H = \frac{a_0}{3} \cdot \left(\frac{2 v_0 \operatorname{sen}(\theta)}{g}\right)^3$

$H = \frac{8}{3} \cdot \frac{a_0 \cdot v_0^3 \cdot \operatorname{sen}^3(\theta)}{g^3} = \frac{8 a_0 V_0^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{3 g^3}$ //

DÍA	MES	AÑO	NOTA
			/

27.- Una partícula se mueve de izquierda a derecha sobre la trayectoria $y = 3x^2 - 2x + 4$ m, con una rapidez constante de 5 m/s. Determine la velocidad y aceleración de la partícula cuando $x = 2$m.

$v_y = 6x\,v_x - 2v_x$

$v_y = v_x(6x - 2)$

$v_y = \sqrt{25 - v_y^2}\,(6x - 2)$

$v_y(2) = \sqrt{25 - v_y^2} \cdot 10$

$v_y^2 = (25 - v_y^2) \cdot 100$

$v_y^2 = 2500 - 100 v_y^2$

$101 v_y^2 = 2500$

$\Rightarrow v_y = 4.975$ m/s

$5^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{25 - v_y^2}$

$v_x = 0.499$ [m/s]

$\vec{v} = 0.499\,\hat{i} + 4.975\,\hat{j}$ [m/s]//

▷ ACELERACIÓN

$v_y = 6x\,v_x - 2v_x$

$a_y = 6v_x^2 + 6x\,a_x - 2a_x$

$a_y = 6v_x^2 + a_x(6x - 2)$

$v_x^2 + v_y^2 = 25$

$2v_x a_x + 2v_y a_y = 0$

$\Rightarrow a_y = -\dfrac{v_x a_x}{v_y}$

Igualamos

$6v_x^2 + a_x(6x - 2) = -\dfrac{v_x a_x}{v_y}$

$v_y \cdot 6v_x^2 + a_x(6x\,v_y - 2v_y) = -v_x a_x$

$a_x(6x\,v_y - 2v_y + v_x) = -6v_x^2$

$\Rightarrow a_x = \dfrac{-6v_x^2 v_y}{6x\,v_y - 2v_y + v_x}$

$a_x(2) = \dfrac{-6 \cdot (0.499)^2 \cdot 4.975}{6 \cdot 2 \cdot 4.975 - 2 \cdot 4.975 + 0.499}$

$a_x(2) = -0.148$ m/s²//

$\Rightarrow a_y(2) = -\dfrac{0.499 \cdot (-0.148)}{4.975}$

$a_y(2) = 0.015$ m/s²//

$\therefore \vec{a} = -0.148\,\hat{i} + 0.015\,\hat{j}$ [m/s²]//

DÍA MES AÑO NOTA

28.- El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = (t^2 - 8t + 7)$ m y $y = (0.5t^2 + 2t - 4)$ m, donde t es el tiempo en segundos. Determine:

a) Al instante $t = 0$ s el tipo de movimiento de la partícula

$v_x = 2t - 8$ $a_x = 2$

$v_y = t + 2$ $a_y = 1$

$v_x(0) = -8$

$v_y(0) = 2$

El movimiento de la partícula será rectilíneo si

$\frac{v_y}{v_x} = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \frac{2}{-8} \neq 2$

Además que no es circular por su aceleración constante

∴ En $t = 0$ el movimiento es curvilíneo//

b) El instante en que la partícula alcanza la rapidez mínima

$v = \sqrt{4t^2 - 32t + 64 + t^2 + 4t + 4}$

$v = \sqrt{5t^2 - 28t + 68}$

$a = (10t - 28) \cdot \frac{1}{2} (5t^2 - 28t + 68)^{-1/2} = 0$

$\Rightarrow t_1 = 2.800$ s//

$\frac{1}{\sqrt{5t^2 - 28t + 68}} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{5t^2 - 28t + 68} = 1$

$5t^2 - 28t + 68 = 1$

$5t^2 - 28t + 67 = 0$

$t_2 = 1.238$ s//

$t_3 = 4.362$ s//

$v(t_1) = 4.578$ m/s $v_x(2.8) = -2.4$ [m/s]

$v_y(2.8) = 4.8$ [m/s]

$v(t_2) = 6.282$ m/s

$v(t_3) = 4.687$ m/s

∴ En el instante $t = 2.800$ s se alcanza la velocidad mínima que es $v = 4.578$ [m/s]; $\vec{v} = -2.4\hat{i} + 4.8\hat{j}$ [m/s]

DÍA MES AÑO NOTA

29.- Cuando una partícula cae desde el reposo a través del aire, experimenta una aceleración dada por: $a = \frac{g}{b^2}(b^2 - v^2)\ m/s$, donde g es la magnitud de la gravedad y es constante, b es un valor constante dado en m/s y v es la rapidez de la rapidez en m/s. Determine

a) El tiempo requerido para que la rapidez sea $v = b/2$

$$a = \frac{g}{b^2}(b^2 - v^2)$$

$$\frac{dv}{(b^2 - v^2)} = \frac{g}{b^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{(b^2 - v^2)}\,dv = \frac{g}{b^2}t$$

$$\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{b+v}{b-v}\right| = \frac{g}{b^2}t + C_1$$

$$\ln\left|\frac{b+v}{b-v}\right| = \frac{2g}{b}t + \cancel{C_1}^{0}$$

$$\frac{b+v}{b-v} = e^{2gt/b}$$

$$b + v = b e^{2gt/b} - v e^{2gt/b}$$

$$v(1 + e^{2gt/b}) = b(e^{2gt/b} - 1)$$

$$v = b \cdot \frac{e^{2gt/b} - 1}{e^{2gt/b} + 1}$$

Si $v = b/2$

$$\frac{\cancel{b}}{2} = \cancel{b} \cdot \frac{e^{2gt/b} - 1}{e^{2gt/b} + 1}$$

$$e^{2gt/b} + 1 = 2e^{2gt/b} - 2$$

$$e^{2gt/b} = 3$$

$$t = \frac{b}{2g}\ln(3)$$

//

DÍA MES AÑO NOTA

b) A que distancia desde donde se soltó la partícula, su rapidez será $v = b/2$

$$v = b \cdot \frac{e^{2gt/b} - 1}{e^{2gt/b} + 1}$$

$$x = b \cdot \int \frac{e^{2gt/b} - 1}{e^{2gt/b} + 1} \, dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}^{v_x}$$

$$a = \frac{dv_x}{dx} \cdot v_x$$

$$dx = \frac{dv_x}{a} \cdot v_x$$

$$x = \int \frac{v}{g/b^2 (b^2 - v^2)} \cdot dv$$

$$x = \frac{b^2}{g} \int \frac{v}{b^2 - v^2} \, dv$$

$$u = b^2 - v^2 \Rightarrow du = -2v \, dv$$
$$\Rightarrow -\frac{du}{2} = v \, dv$$

$$x = \frac{b^2}{2g} \int -\frac{du}{u} = -\frac{b^2}{2g} \int \frac{du}{u}$$

$$x = -\frac{b^2}{2g} \ln |u|$$

$$x = \left[-\frac{b^2}{2g} \ln |b^2 - v^2| \right]_0^{b/2}$$

$$x = -\frac{b^2}{2g} \left[\ln \left| b^2 - \frac{b^2}{4} \right| - \ln |b^2| \right]$$

$$x = -\frac{b^2}{2g} \left[\ln |3b^2/4| - \ln |b^2| \right]$$

$$x = -\frac{b^2}{2g} \cdot \ln [3/4] = \frac{b^2}{2g} \ln (4/3)$$

Scanned with CamScanner

DÍA MES AÑO NOTA

30.- Para una partícula que se mueve en el plano xy por la trayectoria $y = x^2 - x - 2$, donde x y y están en metros, se conoce que $v_x = 2x$ m/s y que cuando $t_0 = 0$ s, $x_0 = 1$ m. Al instante $t = 0.5$ s, determine:

a) la componente de la velocidad v_y

$v_y = 2x\,v_x - v_x$

$v_y(0.5) = 2 \cdot e \cdot 2e - 2e$

$v_y(0.5) = 2e(2e-1)$ //

$v_y(0.5) \approx 8.873$ m/s

$v_x = 2x$ m/s

$\frac{dx}{dt} = 2x$

$\frac{dx}{2x} = dt$

$\frac{1}{2}\ln|x| = t$

$\ln|x| = 2t$

$x = e^{2t}$

$x = e$

b) la relación a_y/a_x.

$v_x = 2x$

$a_x = 2v_x$

$v_y = 2x\,v_x - v_x$

$a_y = 2v_x^2 + 2x\,a_x - a_x$

$\frac{a_y}{a_x} = \frac{2v_x^2 + 2x\,a_x - a_x}{2v_x}$

$\frac{a_y}{a_x} = \frac{2(2e)^2 + 2e(4e) - 4e}{2(2e)}$

$\frac{a_y}{a_x} = \frac{4e^2 + 4e^2 - 2e}{2e}$

$\frac{a_y}{a_x} = \frac{8e^2 - 2e}{2e} = 4e - 1$ //