

MECÁNICA NEWTONIANA

2020 A

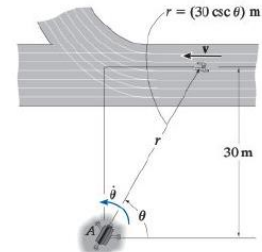
HOJA DE TRABAJO 6

CINEMÁTICA 3

PREGUNTAS

- Una partícula se mueve en el plano xy de acuerdo con las siguientes relaciones en función del tiempo t : $x = ae^{-bt} \cos(bt)$ y $y = ae^{-bt} \sin(bt)$, donde a y b son constantes positivas, la componente radial de la velocidad es:
 - ae^{-bt}
 - be^{-bt}
 - bt
 - $-br$
 - br
- Si el vector posición de una partícula con respecto a un punto fijo es constante en magnitud y variable en dirección, entonces es correcto afirmar que:
 - la componente radial de la velocidad es cero
 - la componente transversal de la velocidad es cero
 - la componente radial de la aceleración es cero
 - la componente transversal de la aceleración es cero
 - la velocidad y la aceleración son nulas
- Una partícula describe una trayectoria plana, de tal manera que $r = 5(1 + \cos\theta)$ m, si la velocidad angular del vector posición de la partícula es constante e igual a 2 rad/s. Para $\theta = \frac{\pi}{3}$, la aceleración de la partícula en m/s^2 , es:
 - $-8.66 \vec{u}_r + 15 \vec{u}_\theta$
 - $8.66 \vec{u}_r + 15 \vec{u}_\theta$
 - $-34.64 \vec{u}_r - 40 \vec{u}_\theta$
 - $-40 \vec{u}_r + 15 \vec{u}_\theta$
 - $-40 \vec{u}_r - 34.64 \vec{u}_\theta$
- El vector posición con respecto a un punto fijo O , de una partícula que se mueve en un plano está dado por $\vec{r} = r\vec{u}_r$, si para todo instante su velocidad es $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, es correcto afirmar que la partícula:
 - describe una trayectoria rectilínea
 - describe una trayectoria parabólica
 - describe una trayectoria circular
 - tiene aceleración radial igual a cero
 - tiene aceleración transversal igual a cero
- En cierto instante una partícula tiene una velocidad $\vec{v} = 3\vec{u}_r + 4\vec{u}_\theta$ m/s y una aceleración $\vec{a} = -\vec{u}_r + 2\vec{u}_\theta$ m/s^2 , la magnitud del radio de curvatura en dicho instante en metros es:
 - 2.5
 - 5.0
 - 10.0
 - 12.5
 - 25.0
- Una partícula describe un movimiento con rapidez constante. En todo instante se cumple que:
 - $0 = \ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + r^2\ddot{\theta}$
 - $0 = r\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + r^2\ddot{\theta}$
 - $0 = \dot{r} + r\dot{\theta}^2 + r^2\ddot{\theta}$
 - $0 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$
 - $0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ y $0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

7. Una partícula se mueve de tal manera que su radio vector con respecto a un punto fijo O disminuye uniformemente en el transcurso del tiempo, es correcto afirmar que:
- $\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = cte = 0$
 - $\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = cte < 0$
 - $\vec{v} \cdot \vec{u}_r = cte = 0$
 - $\vec{v} \cdot \vec{u}_r = cte < 0$
 - $\vec{v} \cdot \vec{u}_r \neq cte$
8. En el instante en el que $\theta = 45^\circ$, el atleta está corriendo con una rapidez constante v de 2 m/s. La velocidad angular $\dot{\theta}$, con la que la cámara A , debe girar para seguir el movimiento en rad/s, es:
- $1/30$
 - $2/30$
 - $3/30$
 - $\sqrt{2}$
 - no se puede determinar

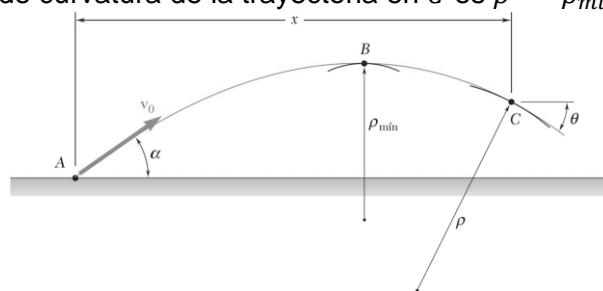


PROBLEMAS

COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

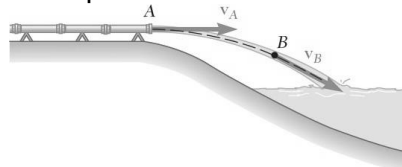
- Dado que: $\vec{v} = v\vec{u}_T$, $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$, calcule $\vec{v} \times \vec{a}$ y utilice este resultado para demostrar que:

$$\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$
- Las coordenadas de un cuerpo en movimiento están dadas por: $x(t) = \frac{1}{3}mt^3$, $y = 7 - \frac{1}{2}mt^2$, $z = mt$. Determine: a) el vector unitario tangencial y normal en función de t , b) la magnitud del radio de curvatura en función de t .
- Una partícula se mueve en el espacio con una velocidad dada por: $\vec{v} = e^t\vec{i} + mt^2\vec{j} - \frac{1}{3}t^3\vec{k}$ m/s, siendo m una constante. Calcule la magnitud del radio de curvatura de la trayectoria en $t = 0$ s. R: $\rho = \infty$
- Se dispara un proyectil desde el punto A con una velocidad inicial \vec{v}_0 . a) Muestre que el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil alcanza su valor mínimo en el punto más alto de la trayectoria B . b) Si se denota mediante θ el ángulo formado por la velocidad y la horizontal en el punto dado C , demuestre que el radio de curvatura de la trayectoria en C es $\rho = \rho_{\min} / \cos^3 \theta$.



- Una partícula se mueve sobre la curva dada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + e^{2t}\vec{j}$ m. a) Use el resultado del problema 1 para calcular la magnitud del radio de curvatura ρ en el punto $(0, 1)$ m. b) Halle la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$, y utilice la ecuación: $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ para calcular ρ en el punto $(0, 1)$ m y compare con el resultado en a). R: a) $\rho = 2.8$ m, b) $y = e^{2x}$
- La componente tangencial de la aceleración de una partícula con movimiento curvilíneo está dada por $a_T = 3t^2 - 2t + 1$ m/s². Si parte del reposo y al instante $t = 2$ s la aceleración tiene una magnitud de 15 m/s², determine la magnitud del radio de curvatura en ese instante. R: $\rho = 3$ m

7. Un tubo horizontal descarga desde el punto A un chorro de agua en un estanque. Exprese la magnitud del radio de curvatura del chorro en el punto B en términos de las magnitudes de las velocidades de \vec{v}_A y de \vec{v}_B .



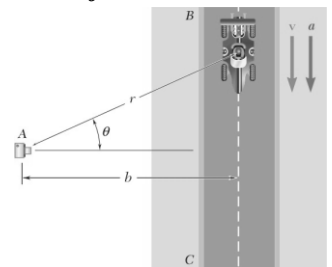
$$R: \rho = \frac{v_B^3}{g v_A}$$

8. Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración para una partícula que se mueve de acuerdo a la ecuación $\vec{r} = t^3 \vec{i} + \text{sen } t \vec{j}$ m.
9. Una partícula se mueve por la trayectoria $y = x^2 - x - 6$ m, de izquierda a derecha, con rapidez constante igual a 10 m/s. Determine para $x = 2$ m, a) la velocidad y la aceleración en componentes tangencial y normal, b) el radio de curvatura. R: $\vec{v} = 10\vec{u}_T$ m/s, $\vec{a} = 6.32\vec{u}_N$ m/s², $\rho = -15.81\vec{u}_N$
10. Una partícula se mueve en el plano xy de izquierda a derecha, de modo que $s = t^3 + t^2 + 5$ m, donde el tiempo t está dado en segundos. Si para $t = 2$ s, su radio de curvatura es $\vec{\rho} = -12\vec{i} - 9\vec{j}$ m, en ese instante, determine: a) la velocidad y la aceleración en componentes rectangulares, b) la velocidad y la aceleración en componentes tangencial y normal, c) la rapidez angular del radio de curvatura. R: a) $\vec{v} = 9.6\vec{i} - 12.8\vec{j}$ m/s, $\vec{a} = 22.06\vec{i} - 0.96\vec{j}$ m/s², b) $\vec{v} = 16\vec{u}_T$ m/s, $\vec{a} = 14\vec{u}_T + 17.07\vec{u}_N$ m/s², c) 1.07 rad/s
11. Una partícula se mueve en el plano xy , por la trayectoria $y = 15 \ln \frac{x}{80}$, donde x y y están en m, de izquierda a derecha, cuando pasa por el punto $P(80, 0)$ m, su rapidez es 120 m/s, y disminuye a razón de 40 m/s². Al pasar por P , determine: a) La componente normal de la aceleración de la partícula. b) Las componentes rectangulares de la aceleración de la partícula. R: a) 32.04 m/s², b) $-33.41\vec{i} - 38.47\vec{j}$ m/s²

COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

12. En un instante dado, una partícula tiene la siguiente posición, velocidad y aceleración relativos a un sistema de coordenadas xy , $x = 4$ m, $y = 2$ m, $\dot{x} = 2\sqrt{3}$ m/s, $\dot{y} = -2$ m/s, $\ddot{x} = -5$ m/s², $\ddot{y} = 5$ m/s². Determine $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, r, \dot{r}, \ddot{r}$. R: $r = 4.47$ m, $\dot{r} = 2.20$ m/s, $\ddot{r} = 0.255$ m/s², $\theta = 0.464$ rad, $\dot{\theta} = -0.746$ rad/s, $\ddot{\theta} = 2.236$ rad/s²
13. Una partícula se mueve por la trayectoria $y = x^2 - x - 6$ m, de izquierda a derecha, con rapidez constante de 10 m/s. Determine para $x = 2$ m; la posición, la velocidad y la aceleración en componentes radial-transversal. R: $\vec{r} = \sqrt{20}\vec{u}_r$ m, $\vec{v} = -7.07\vec{u}_r + 7.07\vec{u}_\theta$ m/s, $\vec{a} = -4.69\vec{u}_r - 4.69\vec{u}_\theta$ m/s²

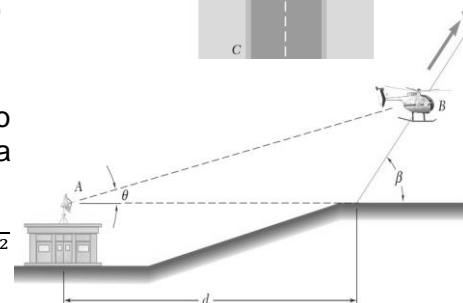
14. Para estudiar el desempeño de un automóvil de carreras, una cámara de movimiento a alta velocidad se ubica en el punto A y se monta sobre un mecanismo que permite registrar el movimiento del automóvil cuando éste se desplaza en el tramo recto BC . Determine la rapidez del automóvil en términos de b, θ y $\dot{\theta}$.



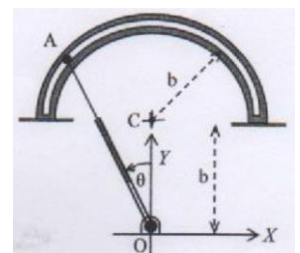
$$R: v = b\dot{\theta} \sec^2 \theta$$

15. Después de despegar, un helicóptero asciende en línea recta en un ángulo constante β . Un radar sigue su vuelo desde el punto A , como se indica en la figura. Determine la rapidez del helicóptero en términos de $d, \beta, \theta, \dot{\theta}$.

$$R: v = d\dot{\theta} \frac{\sin \beta}{(\text{sen}(\beta - \theta))^2}$$

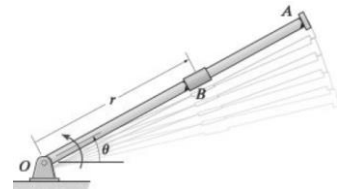


16. El movimiento del rodillo A por la ranura circular fija, está gobernado por el brazo OA , cuya parte superior desliza libremente en la parte inferior para acomodarse a la variación de la distancia OA . En la posición mostrada, el brazo tiene una velocidad angular de 5 rad/s en sentido horario y va disminuyendo a razón de 2 rad/s en cada segundo. Dado que $\theta = 30^\circ$ y $b = 0.5$ m, determine la magnitud de la velocidad y la magnitud de la aceleración en A .

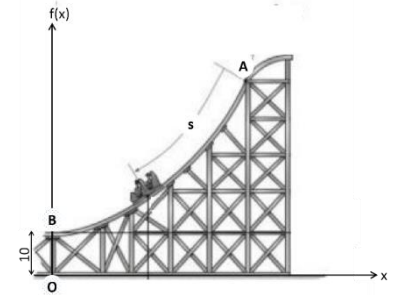


$$R: v = 5 \text{ m/s}, a = 50.04 \text{ m/s}^2$$

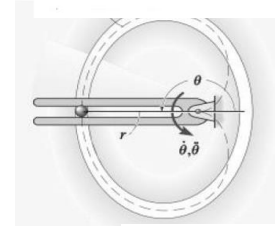
17. La rotación del brazo OA de 0.9 m alrededor de O se define mediante la relación $\theta = 0.15t^2$ rad, donde t es el tiempo y está en segundos. El collarín B desliza a lo largo del brazo de modo que su distancia desde O es $r = 0.90 - 0.12t^2$ m, donde t es el tiempo y está en segundos. Cuando el brazo OA forma un ángulo de 30° , con la horizontal, determine las componentes, radial y transversal de la velocidad y de la aceleración del collarín B .
 R: $\vec{v} = -0.45\vec{u}_r + 0.27\vec{u}_\theta$ m/s, $\vec{a} = -0.39\vec{u}_r - 0.36\vec{u}_\theta$ m/s²



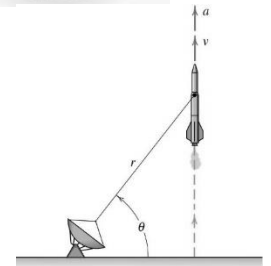
18. Considere el carrito en la montaña rusa que se representa por la ecuación $f(x) = \frac{x^2}{10} + 10$ m. El carrito empieza a moverse a partir del reposo en A y su rapidez cambia de acuerdo a $a_T = 10 + 2s$ m/s², donde s representa la distancia recorrida sobre la curva a partir de A. Si se conoce que la distancia recorrida hasta B es $s = 10$ m. Determine en el punto B: la magnitud de su aceleración, el radio de curvatura y el valor de \dot{r} .
 R: $a = 10\sqrt{73}$ m/s², $\rho = 5$ m, $\dot{r} = 120$ m/s²



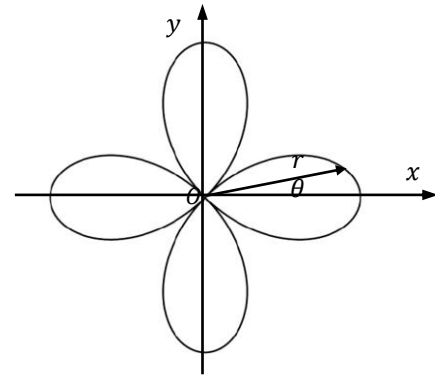
19. Debido a la rotación de la barra ahorquillada, la bola de la figura se mueve alrededor de una trayectoria ranurada, una parte de la cual tiene la forma de un cardiode $r = 0.5(1 - \cos \theta)$ m, donde θ está en radianes. Si la velocidad tiene una magnitud de 4 m/s y su aceleración una magnitud de 30 m/s² en el instante en que $\theta = 180^\circ$, determine $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$.
 R: $\dot{\theta} = 4$ rad/s, $\ddot{\theta} = 18$ rad/s²



20. El cohete ha sido disparado verticalmente y es seguido por el radar que se representa. Cuando $\theta = 60^\circ$, se conoce que $r = 9$ km, $\dot{r} = 21$ m/s² y $\dot{\theta} = 0.02$ rad/s. Halle las magnitudes de la velocidad y de la aceleración del cohete para esta posición y los valores de \dot{r} y $\ddot{\theta}$.
 R: $v = 360$ m/s, $a = 20.09$ m/s², $\dot{r} = 311.77$ m/s, $\ddot{\theta} = -2.69 \times 10^{-4}$ rad/s²



21. Una partícula se mueve por la trayectoria mostrada en la figura, de tal manera que $r = (5 \cos 2\theta)$ m, si la velocidad angular del vector posición de la partícula es $\dot{\theta} = 3t^2$ rad/s y al instante $t_0 = 0$ s, se conoce que $\theta_0 = 0$ rad, determine para el instante t_1 , en el cual $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ rad: a) Las componentes radial y transversal de la velocidad de la partícula. b) Las componentes radial y transversal de la aceleración de la partícula. c) La magnitud del radio de curvatura.
 R: a) $\vec{v} = -16.88\vec{u}_r + 4.87\vec{u}_\theta$ m/s. b) $\vec{a} = -89.36\vec{u}_r - 53.7\vec{u}_\theta$ m/s². c) $\rho = 4.04$ m.



22. Considere una partícula que se mueve sobre la trayectoria dada por la ecuación $2x^2 - y^2 = 2$. Si se conoce que en el punto $P = (2, \sqrt{6})$ m, la partícula se mueve de izquierda a derecha con movimiento acelerado, con una rapidez de 10 m/s y una aceleración de magnitud 12 m/s², determine en el punto P: a) las componentes radial y transversal de su velocidad y b) las componentes normal y tangencial de su aceleración.
 R: a) $\vec{v} = 9.91\vec{u}_r + 1.34\vec{u}_\theta$ m/s. b) $\vec{a} = 11.36\vec{u}_T + 3.87\vec{u}_N$ m/s²