

# Cálculo

V E C T O R I A L



# ESCUELA POLITECNICA NACIONAL CONSEJO DE DOCENCIA



EPN-GD-MSP-03-03-PRD-05-FRM-02

## SILABO

Versión 2

<b>UNIDAD ACADÉMICA:</b>	CIENCIAS
<b>CARRERA:</b>	(RRA20) MATEMÁTICA APLICADA

<b>PERIODO ACADÉMICO:</b>	2025-B	SEPTIEMBRE 2025 - FEBRERO 2026	<b>TIPO:</b>	ORDINARIO
---------------------------	--------	--------------------------------	--------------	-----------

### DETALLE DE ASIGNATURA:

<b>NOMBRE:</b>	CALCULO VECTORIAL	<b>PARALELO:</b>	A
<b>CÓDIGO:</b>	MATD324	<b>PENSUM:</b>	IMA.20.30.01
<b>CRÉDITOS:</b>	4.00	<b>MODALIDAD (TIPO)</b>	PRESENCIAL OBLIGATORIAS

COMPONENTES DE ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES	HORAS POR SEMANA	HORAS POR PERIODO ACADEMICO
Aprendizaje en Contacto con el Docente (AC)	6.00	96
Aprendizaje Práctico Experimental (AP)	0.00	0
Aprendizaje Autónomo (AA)	6.0	96
<b>TOTAL</b>	12.00	192

### REQUISITOS DE LA ASIGNATURA

CO-REQUISITOS		PRE-REQUISITOS	
NOMBRE	CÓDIGO	NOMBRE	CÓDIGO
		ALGEBRA LINEAL	MATD115
		CALCULO INTEGRAL	MATD224

### HORARIO DE LA ASIGNATURA:

COMPONENTE DE APRENDIZAJES	HORARIO
AC	MATD324 - CALCULO VECTORIAL - A - Lunes: 11-13 Martes: 7- 9 Miércoles: 9-11

### DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA:

ESTA ASIGNATURA EXTIENDE LA TEORÍA DE CONTINUIDAD, DIFERENCIABILIDAD E INTEGRABILIDAD DE FUNCIONES REALES PARA FUNCIONES VECTORIALES.

### INFORMACIÓN DE PROFESOR(ES) A CARGO:

NOMBRE	CORREO	FORMACIÓN ACADÉMICA	PARALELO	COMPONENTE DE APRENDIZAJE	DOCENTE PRINCIPAL
URVINA MAYORGA MENTHOR OSWALDO	menthor.urvina@e pn.edu.ec	MAGISTER EN INVESTIGACION OPERATIVA MENCION GERENCIA	A	AC	X

## OBJETIVOS DE CARRERA QUE APORTA LA ASIGNATURA: CALCULO VECTORIAL

CARRERA	OBJETIVO
(RRA20) MATEMÁTICA APLICADA	Alta capacidad de abstracción y de aplicar sus conocimientos a casos reales.
(RRA20) MATEMÁTICA APLICADA	Consultoría e investigación matemática pura y aplicada.
(RRA20) MATEMÁTICA APLICADA	Docencia en instituciones de educación superior, asesoría educativa.
(RRA20) MATEMÁTICA APLICADA	Realizar investigaciones por muestreo, estudios de mercado, control de calidad, análisis de riesgos, estudios actuariales.

## RESULTADOS DEL APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA:

TIPO DE RESULTADO	DESCRIPCIÓN DEL RESULTADO	FORMA DE EVIDENCIAR EL CUMPLIMIENTO**
Conocimientos	"1.1 EXPLICAR LOS CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN $\mathbb{R}^n$ . 1.2 EXPLICAR EL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES. 1.3 EXPLICAR LA DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL Y DERIVADAS PARCIALES. 1.4 DESCRIBIR LA RELACIÓN ENTRE EL GRADIENTE Y LA DIFERENCIAL DE UN CAMPO ESCALAR. 1.5 DESCRIBIR LA RELACIÓN ENTRE LA MATRIZ JACOBIANA Y LA DIFERENCIAL DE UN CAMPO VECTORIAL. 1.6 EXPLICAR LAS DEFINICIONES DE INTEGRALES DE LÍNEA, MÚLTIPLES Y DE SUPERFICIE. 1.7 RELACIONAR LOS CONCEPTOS DE CONTINUIDAD, DIFERENCIABILIDAD E INTEGRABILIDAD. 1.8 ENUNCIAR Y EXPLICAR EL SIGNIFICADO DE LOS TEOREMAS DE GREEN, STOKES Y DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS."	Pruebas, exámenes y tareas que son evaluadas en forma continua
Destrezas	"2.1 DEMOSTRAR QUE UN CIERTO NÚMERO O VECTOR ES EL LÍMITE DE UN CAMPO ESCALAR O VECTORIAL. 2.2 CALCULAR LÍMITES DE CAMPOS ESCALARES O VECTORIALES USANDO PROPIEDADES. 2.3 DEMOSTRAR QUE UN CAMPO ES DIFERENCIABLE O INTEGRABLE. 2.4 CALCULAR DERIVADAS O INTEGRALES DE CAMPOS USANDO PROPIEDADES. 2.5 APLICAR LOS TEOREMAS DE GREEN, DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS Y DE STOKES."	Resolución de diferentes problemas y ejercicios donde interviene el cálculo diferencial: aplicación de los conceptos en la modelación y solución
Valores y actitudes	"3.1 DISCRIMINAR ENTRE PROCESOS MECÁNICOS PARA LA SOLUCIÓN DE CIERTOS PROBLEMAS Y PROCESOS SUSTENTADOS Y EXPLICADOS POR UNA TEORÍA. 3.2 ADOPTAR COMO UNA ÉTICA MATEMÁTICA: LA NO ACEPTACIÓN DE ASEVERACIONES SIN LA CORRESPONDIENTE DEMOSTRACIÓN, Y LA REFLEXIÓN SOBRE EL SIGNIFICADO DE LAS MENCIONADAS ASEVERACIONES. 3.3 DEMOSTRAR CAPACIDAD DE ESTUDIO Y TRABAJO EN EQUIPO. 3.4 DESARROLLAR EL SENTIDO DE RESPONSABILIDAD EN EL CUMPLIMIENTO DE LAS TAREAS, COMPROMISOS Y OBLIGACIONES. 3.5 DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE AUTONOMÍA, EN PARTICULAR EN EL APRENDIZAJE, A FIN DE AMPLIAR Y PROFUNDIZAR LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS."	Conformación de grupos de trabajo para la realización de tareas relacionadas con la materia, Deben demostrar ser participativos con autoaprendizaje y reflexión de los conceptos a utilizar.

\*\* Descripciones específicas, medibles y demostrables de lo que el estudiante deberá hacer para el logro de los resultados del aprendizaje.

## CONTENIDOS Y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA

**DOCENTE: URVINA MAYORGA MENTHOR OSWALDO, PARALELO: A, COMPONENTE : AC**

N°	SEMANA	CONTENIDO	COMPONENTE DE APRENDIZAJE	HORAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
1	SEMANA1	Introducción a la Topología de $R^n$ - Bolas, conjuntos abiertos, cerrados y compactos. Teorema de Heine-Borel, Clausura, frontera e interior de subconjuntos de $R^n$	AC	6.0	Clase magistral con la participación de todos los alumnos
			AA	6.0	Resolución de ejercicios sobre Topología de $R^n$
2	SEMANA2	Definición de límite en campos escalares y vectoriales propiedades y ejemplos Presentación del límites en trayectorias, campos escalar y campos vectoriales	AC	6.0	Definición de límite en campos escalares y vectoriales propiedades y ejemplos ilustrativos Presentación del límites en trayectorias, campos escalares y campos vectoriales
			AA	6.0	Resolución de ejercicios y problemas de límites y continuidad
3	SEMANA3	Parametrización de curvas: Diferenciación e integración de Trayectorias - Aplicaciones: vectores y planos asociados a una curva; curvatura y longitud de arco; Problemas de movimiento	AC	6.0	Presentación de la derivada y diferencial de una trayectoria. Definición de la integral de una trayectoria. Vector tangente, plano tangente, plano osculador, problemas de movimiento
			AA	6.0	Resolución de problemas sobre diferenciación de trayectorias
4	SEMANA4	Diferenciación de Trayectorias - Aplicaciones: vectores y planos asociados a una curva; curvatura y longitud de arco; problemas de movimiento Prueba escrita	AC	6.0	Clase magistral: Vector tangente, plano tangente, plano osculador, problemas de movimiento
			AA	6.0	Solución de problemas de aplicación de las trayectorias: problemas geométricos y de movimiento
5	SEMANA5	Diferenciación de campos escalares - Derivada direccional y derivadas parciales, Gradiente y sus aplicaciones. Diferencial. Propiedades y regla de la cadena	AC	6.0	Presentación de la derivada direccional, derivadas parciales. gradiente, diferencial y regla de la cadena. Ejemplos
			AA	6.0	Resolución de ejercicios sobre derivación de campos escalares y sus aplicaciones
6	SEMANA6	Diferenciación de campos escalares - Teorema del valor medio, Derivadas Parciales de orden superior. Fórmula de Taylor. Ejemplos de aplicación	AC	6.0	Ejercicios de aplicación del valor medio, de derivadas de orden superior y de la fórmula de Taylor
			AA	6.0	Solución de problemas de aplicación de la derivación de campos escalares
7	SEMANA7	Diferenciación de campos escalares - Extremos de campos escalares. Multiplicadores de Lagrange Prueba escrita	AC	6.0	Optimización en campos escalares sin y con restricciones
			AA	6.0	Solución de problemas de optimización con y sin restricciones
8	SEMANA8	Diferenciación de Campos vectoriales - Diferencial y matriz Jacobiana. Regla de la cadena. Operador nabla: gradiente, rotacional, divergencia, laplaciano.. Teoremas de la función inversa y de la función implícita. Examen Bimestral	AC	6.0	Presentación da la matriz Jacobiana y de la regla de la cadena en campos vectoriales. Aplicaciones de los teoremas de la función inversa y de la derivación implícita
			AA	6.0	Resolución de ejercicios de derivación de campos vectoriales y sus aplicaciones
9	SEMANA9	Integrales de línea - Integral de línea de campos vectoriales, Integral de línea de campos escalares (0 respecto a la longitud de arco) Teoremas fundamentales del cálculo para integrales de línea	AC	6.0	Clase magistral: Definición de integral de línea de campos vectoriales, propiedades, definición de integral de línea de campos escalares; ejemplos ilustrativos
			AA	6.0	Solución de ejercicios de integral de línea: parametrización de curvas
10	SEMANA10	Integrales de línea - Aplicaciones Prueba de evaluación	AC	6.0	Ejemplos de aplicación de las integrales de línea de tipo geométrico y físico Prueba escrita
			AA	6.0	Resolución de problemas de las aplicaciones de la integral de línea de campos vectoriales y de campos escalares
11	SEMANA11	Integrales múltiples - Integral doble e interpretación geométrica Teorema de Green	AC	6.0	Definición y propiedades de la integral doble, ejemplos ilustrativos. Aplicaciones del teorema de Green para calcular áreas planas con una integral de línea

			AA	6.0	Resolución de ejercicios de integral doble y de aplicación del teorema de Green
12	SEMANA12	Integrales múltiples - Integral triple Integrales múltiples - Cambio de variables en integrales dobles y triples	AC	6.0	Definición de la integral triple. Regiones elementales en $R^3$ Cambio de variables en integral doble y triple
			AA	6.0	Solución de problemas de integral triple con cambios de variables
13	SEMANA13	Integrales múltiples - Aplicaciones Prueba de evaluación	AC	6.0	Aplicaciones de la integral doble y triple: ejemplos ilustrativos Prueba de evaluación
			AA	6.0	Resolución de ejercicios de aplicación de la integral múltiple
14	SEMANA14	Integrales de superficie - Parametrización de superficies Integral de superficie de campos vectoriales	AC	6.0	Presentación de superficies parametrizables: superficies de revolución Definición de la integral de superficie de campos vectoriales
			AA	6.0	Solución de problemas de parametrización de superficies y de cálculo de integrales de superficie
15	SEMANA15	Integral de superficie de campos escalares Aplicaciones de las integrales de superficie de campos escalares y vectoriales	AC	6.0	Definición y propiedades de la integral de superficie de campos escalares, ejemplos ilustrativos Aplicaciones varias de las integrales de superficie de campos escalares y vectoriales
			AA	6.0	Resolución de problemas de aplicación de las integrales de superficie
16	SEMANA16	Teorema de Stokes Teorema de la Divergencia de Gauss Examen Bimestral	AC	6.0	Presentación y aplicación del Teorema de Stokes y del Teorema de la Divergencia Examen Bimestral
			AA	6.0	Resolución de problemas de aplicación de los teoremas de Stokes y de la Divergencia

### BIBLIOGRAFÍA BÁSICA OBLIGATORIA:

1.-Apostol, T , 2002. Calculus, vol. 2. Lugar de publicación: México. Editorial EditorialReverté
1.-Apostol, T. , 1969. Calculus. Volume 2. Lugar de publicación: . EditorialJohn Wiley & Sons
1.-Sydsaeter, K., Hammond, P., Strom, A., & Carvajal, A. , 2016. Essential Mathematics for Economic Analysis. Lugar de publicación: . EditorialPearson

### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA ADICIONAL:

-Marsden, J., Tromba, A , 2004. Cálculo Vectorial. Lugar de publicación: . EditorialEditorialPearson Addison Wesley
-Stewart, J. , 2014. Cálculo Multivariable, 7ma ed. Lugar de publicación: . EditorialCengage Learning
-Docuchet, J., Zwahlen, B , 2011. Calcul différentiel et intégral: Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles. Lugar de publicación: . EditorialPPUR
-Marsden, J., Tromba, A , 2004. Cálculo Multivariable 7ma edición. Lugar de publicación: . EditorialCengage Learning

### METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA

**DOCENTE: URVINA MAYORGA MENTHOR OSWALDO, PARALELO: A, COMPONENTE : AC**

Método de aprendizaje	Recursos de aprendizaje	Escenarios de aprendizaje
Clases magistrales de manera presencial. Presentación de la teoría y ejemplos ilustrativos	Documentos conteniendo la teoría básica y problemas y ejercicios de aplicación a ser resueltos por los alumnos	Uso de recursos básicos (aula, pizarra, etc.) para las clases presenciales y recursos virtuales sincrónicos y asincrónicos para tutoría y consultas de los estudiantes

### USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL

## a.- Ámbito de aplicación de la inteligencia artificial por parte del profesor

## b.- Ámbito de aplicación de la inteligencia artificial por parte del estudiante

### EVALUACIÓN

IMPORTANTE: De acuerdo al Art. 80 del RRA la contribución de cada componente de evaluación no podrá exceder el 35% de la calificación del aporte

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN	TIPO	APORTE 1 (%)	APORTE 2 (%)
Deberes	Sumativa	15.0	15.0
Prueba 1	Sumativa	25.0	25.0
Prueba 2	Sumativa	25.0	25.0
Examen Bimestral	Sumativa	35.0	35.0
		100.0	100.0

### HORARIO Y MECANISMOS DE TUTORÍAS:

DOCENTE: URVINA MAYORGA MENTHOR OSWALDO, PARALELO: A, COMPONENTE: AC

Horario (s) de tutorías	Ubicación / mecanismo / herramienta de contacto
Martes de 13h00 a 15h00	Presencial Oficina, edificio N.3, 7mo piso Virtual a través de Zoom: ID: 865 551 1423

### POLÍTICAS DE DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

DOCENTE: URVINA MAYORGA MENTHOR OSWALDO, PARALELO: A, COMPONENTE: AC

En el curso se pondrá énfasis en la ética de todos los integrantes, cualquier tipo de copia en los instrumentos de evaluación, automáticamente anula al instrumento
Se espera de todos los estudiantes la colaboración y compromiso con el curso para obtener resultados exitosos tanto en la parte académica como personal
Las clases presenciales y sincrónicas se empezarán a la hora programada. Si un alumno no puede conectarse a la video conferencia de tutoría puede revisar la grabación de la clase que estará disponible en el aula virtual

### ADAPTACIONES CURRICULARES PARA ATENDER A ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES:

<b>Metodologías de enseñanza-aprendizaje:</b>
Se dará especial atención a estudiantes NEE en absolver inquietudes durante las clases
<b>Ambientes de enseñanza-aprendizaje:</b>
A los estudiantes NEE de preferencia se les ubicará en las primera filas para que puedan tener mayor atención a las clases magistrales
<b>Métodos e instrumentos de evaluación:</b>
En las pruebas y exámenes se les dará prioridad en preguntas y de ser el caso se les otorgará más tiempo para la realización

### UBICACIÓN:

Espacio:E26-P3/E002
---------------------

# Introducción

En este curso vamos a trabajar con funciones, cuya variable independiente y/o variable dependiente son de naturaleza vectorial.

En general, serán de la forma:

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto \vec{F}(x) = (f_1(x); \dots; f_m(x))^T$$

Los casos particulares son:

1.-  $n=1; m=1$ :  $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$  → función real de variable real

2.-  $n=1; m \geq 2$ :  $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t); \dots; \alpha_m(t)) = X(t)$   
 ↪ Función vectorial de variable real:  
 trayectoria

3.-  $n \geq 2; m=1$ :  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$  → función real de variable vectorial: campo escalar

4.-  $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $x \mapsto F(x)$  → función vectorial de variable vectorial  
 si  $n=m$ ,  $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice campo vectorial



## ejemplos:

1.-  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x) = \ln|x| + e^{-x}$

2.-  $\alpha: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto \alpha(t) = (a \cos(t); b \sin(t))$   
 $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}$

3.-  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 y - y z^2$

4.-  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto F(x, y) = (x+y, x-y)$

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = (x+y, y+z)$

## Representación Gráfica

1.- Para funciones reales de variable real:  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$

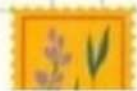
Gráfica de  $f$ :  $\text{Gra}f = \{(x, y) / y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$   
 $\hookrightarrow$  curva en  $\mathbb{R}^2$

2.-  $\text{Gra}\alpha = \{(t; x) / x = \alpha(t)\}$   
 $= \{(t; x_1(t); \dots; x_n(t))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $t \mapsto \alpha(t) = x(t)$

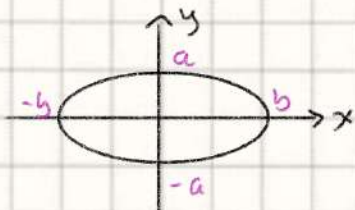
representación gráfica:  $\{x \in \mathbb{R}^n / x = \alpha(t)\} \subseteq \mathbb{R}^n$   
 $\hookrightarrow$  curva en  $\mathbb{R}^n$

Observación: para el caso de trayectorias, no se suele representar gráficamente la gráfica, sino, únicamente la imagen



**ejemplo:**  $\alpha(t) = (a \cos t; b \sin t)$   
 $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



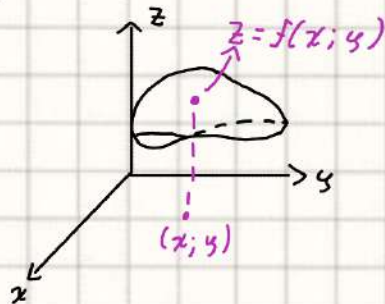
La curva que corresponde a la imagen se dice que tiene como representación paramétrica a la función  $\alpha$ .

3.- Campo escalar:  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$

$$\text{Graf } f = \{(x; f(x)) \mid x \in U\}$$

$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

- $n=1$ :  $\text{Graf } f \subseteq \mathbb{R}^2$ : curva
- $n=2$ :  $\text{Graf } f \subseteq \mathbb{R}^3$ : superficie

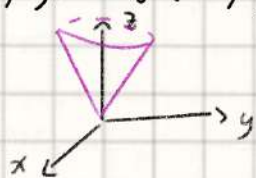


**ejemplo:**

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; y) \mapsto f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z = f(x; y)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Para  $n \geq 3$ , no es posible graficar la función.

4.- No es posible representar gráficamente el 4º caso.



## Herramientas para graficar un campo escalar en $\mathbb{R}^2$

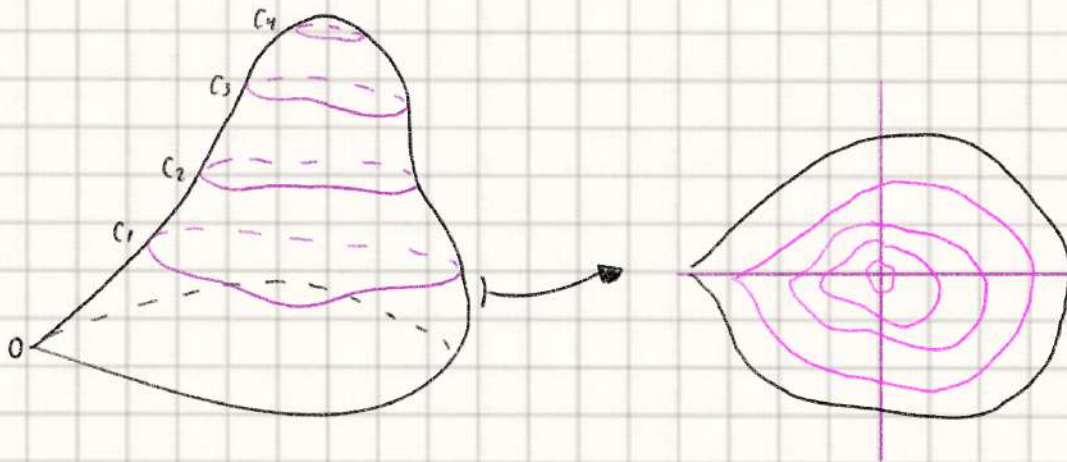
Sea un campo escalar de la forma:

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \Leftrightarrow z = f(x, y)$$

Graf  $f = \{(x, y, z) / z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ : superficie

Para diseñar esta superficie, se pueden realizar cortes horizontales o verticales, como se ve en el gráfico:



Los cortes horizontales que dan como resultado curvas, se denominan cortes de nivel. Si estas curvas se ubican a la altura correspondiente, se puede reconstruir la superficie.

**Definición:** Curva de nivel de valor  $c$ :  $N_c f = \{(x, y) / f(x, y) = c\}$

En general, para cualquier campo escalar, las curvas de nivel se denominan conjuntos de nivel, conformados por los puntos que representen el mismo valor  $c$ .

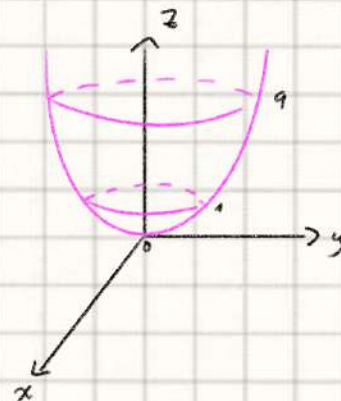
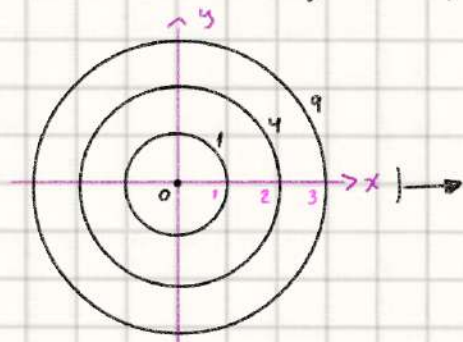
Dependiendo de lo que represente la función  $f$ , los conjuntos de nivel toman nombres específicos:

- $f$  es una temperatura: isoterms
- $f$  es presión: isobaras.

**ejemplo:**  $z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2$

curva de nivel:  $N_c f = \{(x, y) / x^2 + y^2 = c\}$

- si  $c \geq 0$ :  $x^2 + y^2 = c$ : circunferencia de radio  $\sqrt{c}$
- si  $c < 0$ :  $x^2 + y^2 = c \Rightarrow \emptyset$



$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

curva de nivel:  $N_c f = \{(x, y) : x^2 + y^2 = c\}$

Las curvas de nivel en este ejemplo también son circunferencias. Al ubicarlas a la altura que les corresponde, se podría diseñar una superficie similar a la del primer ejemplo, lo cual es incorrecto.

Así, podemos concluir que solo con las curvas de nivel no es suficiente para obtener un buen diseño. En este caso, pueden ser de ayuda los cortes verticales, llamados **secciones**.

• **Sección en plano yz:  $x=0$ :**  
 $S_1 = \{(x, y, z) / x=0\}$   
 $= \{(0, y, z) / z = f(0, y)\}$

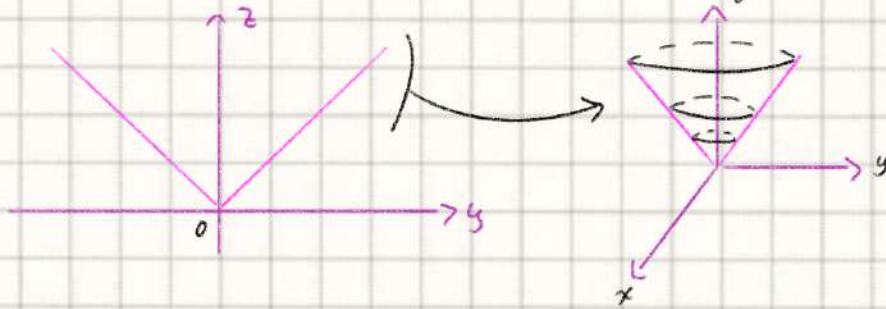
• **Sección en plano xz:  $y=0$ :**  
 $S_2 = \{(x, y, z) / y=0\}$   
 $= \{(x, 0, z) / z = f(x, 0)\}$



**ejemplo:**  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

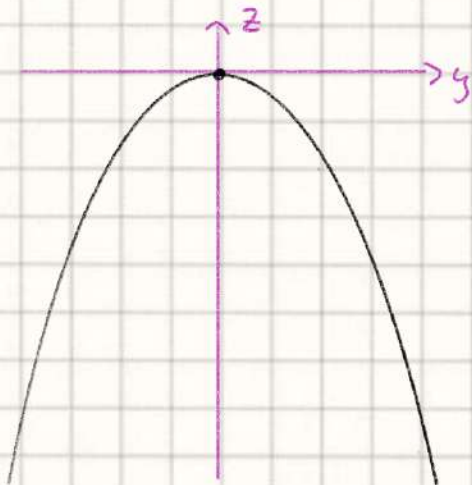
$$S_1 = \{(0; y; z) / z = \sqrt{y^2}\}$$

$$= \{(0; y; z) / z = |y|\}$$

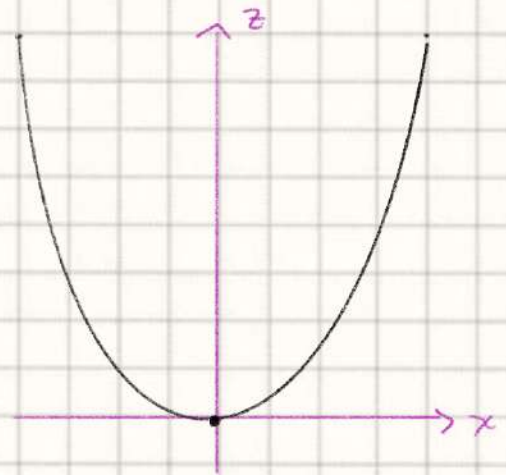


$$z = x^2 - y^2$$

$$S_1 = \{(0; y; z) / z = -y^2\}$$

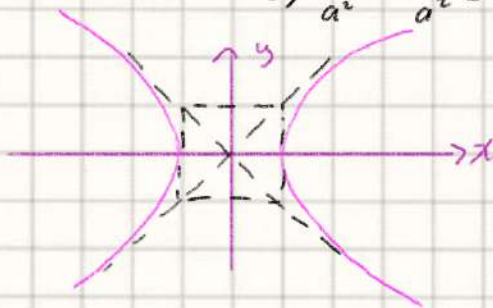


$$S_2 = \{(x; 0; z) / z = x^2\}$$

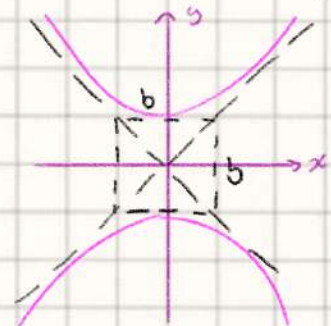


Curvas de nivel:  $x^2 - y^2 = c$

- $c > 0; c = a^2: x^2 - y^2 = a^2$   
 $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$



- $c < 0: c = -b^2: x^2 - y^2 = -b^2$   
 $\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

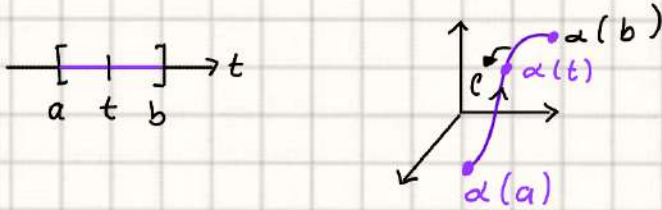


## Herramientas para representar Trayectorias

Trayectoria:  $\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t); \dots; x_n(t)) = X(t)$$

La imagen de este tipo de funciones es una curva (en  $\mathbb{R}^n$ )



Se dice que la función  $\alpha$  es la parametrización de  $C$ .

Parametrización:  $C: \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}; a \leq t \leq b$

**ejemplo:**

$$C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(t) = (t^2; t^3)$$

"eliminando el parámetro:

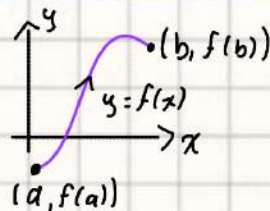
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = t^6 \\ y^2 = t^6 \end{cases} \Rightarrow C: x^3 = y^2$$

**Observación:** en la práctica, dada la función  $\alpha$ , se busca la forma que tendrá su imagen. Para ello, se puede "eliminar" el parámetro para obtener una ecuación cartesiana de la curva.

**Observación:** en problemas prácticos, el proceso es recíproco: dada la curva  $C$ , hay que hallar una parametrización de la misma.

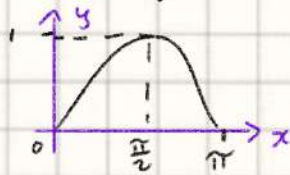
En el caso de curvas planas (en  $\mathbb{R}^2$ ), los más usados son:

1: **Gráfica de una función:**  $y = f(x); a \leq x \leq b$



Parametrización:  $C: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}; a \leq t \leq b$

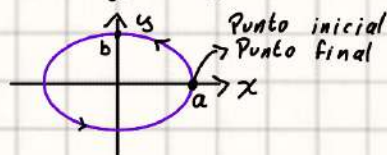
**ejemplo:**  $y = \sin x$  ;  $0 \leq x \leq \pi$



$$C: \begin{cases} x = t \\ y = \sin(t) \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$$

2.- La curva es una cónica:

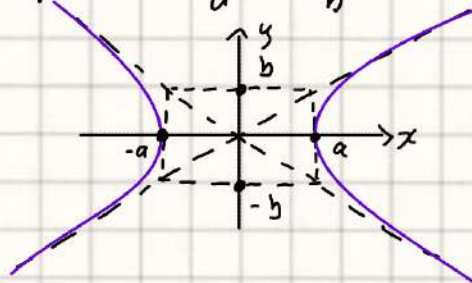
♥ Elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Parametrización

$$C: \begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = b \sin(\omega t) \end{cases} ; 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$$

♥ Hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

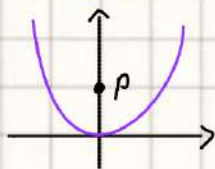


Parametrización:

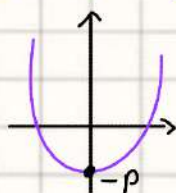
$$C: \begin{cases} x = a \cosh(\omega t) \\ y = b \sinh(\omega t) \end{cases} ; -\infty < t < \infty$$

♥ Parábola:

Vértice en el origen:  $x^2 = 4py$



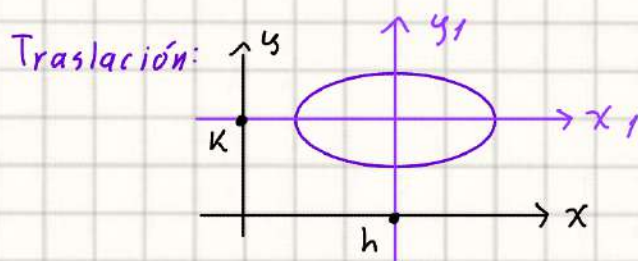
Foco en el origen:  $x^2 = 4p(y+p)$



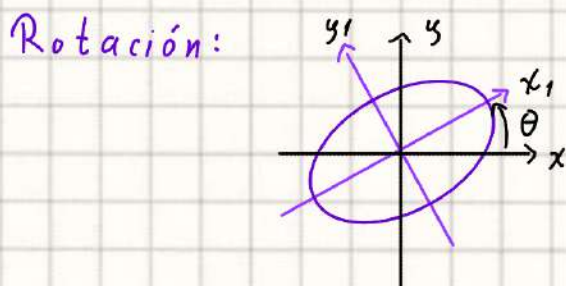
**Observación:** una ecuación cuadrática con variables  $x$  y  $y$ , de la forma  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  representa siempre a una cónica, que puede estar rotada y/o trasladada. Para encontrar una parametrización de esta curva, se debe ponerla en forma canónica, realizando traslaciones y/o rotaciones.

$Ax^2$ : rotación

$Dx, Ey$ : traslación



$$\begin{cases} x_1 = x - h \\ y_1 = y - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y_1 = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}$$

06/10/2025

# Topología en $\mathbb{R}^n$

**Definición (Bola Abierta):** Dado un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y un escalar  $r > 0$ , la bola de centro  $x_0$  y radio  $r$  se denota y define por:

$$B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

**Observación:** en adelante, si no se dice lo contrario, se trabajará con la norma euclidiana, pero eso no limita a otro tipo de normas o métricas.

✓ **Norma euclidiana:**  $\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

✓ **Norma p:**  $\|A\|_p = (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p}$

↳ Norma 1:  $\|A\|_1 = \sum |a_i|$

↳ Norma  $\infty$ :  $\|A\|_\infty = \max_i \{|a_i|\}$

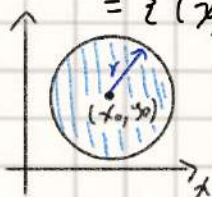
**Observación:** dependiendo de la métrica utilizada, la norma tendrá su correspondiente geometría.

**ejemplo:**

en  $\mathbb{R}^2$ : norma euclidiana

Sin pérdida de generalidad, se puede tomar el centro en el origen.

$$\begin{aligned} B &= \{(x_0, y_0); r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

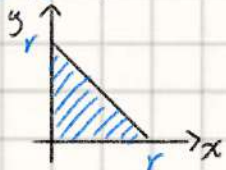


- norma 1: centro en el origen:  $x_0 = (0, 0)$

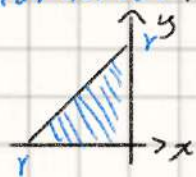
$$\begin{aligned} B(x_0; r) &= B(0, 0; r) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, 0)\|_1 < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y)\|_1 < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| < r\} \end{aligned}$$

Representación gráfica:

1º cuadrante:  $|x| + |y| < r \Leftrightarrow x + y < r$

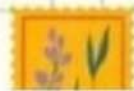


2º cuadrante:  $|x| + |y| < r \Leftrightarrow -x + y < r$



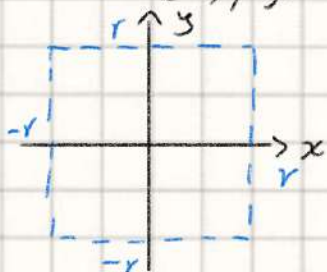
3º cuadrante:

4º cuadrante:



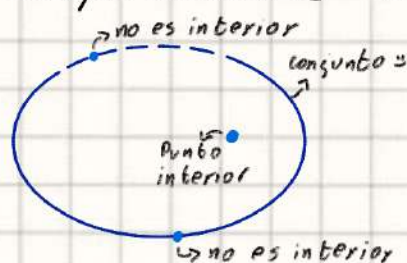
- norma infinito: Centro en el origen :  $x_0 = (0, 0)$

$$\begin{aligned}
 B(x_0; r) &= B((0, 0); r) \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, 0)\|_\infty < r\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y)\|_\infty < r\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \max_i \{|x_i|\} < r\}
 \end{aligned}$$



En  $\mathbb{R}^3$ , la bola con norma euclidiana representa una esfera.

**Definición (Punto interior):** sea  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que  $x_0$  es interior a  $U$ , si existe una bola  $B(x_0; r)$  que esté completamente contenida en  $U$ .



**Definición (conjunto abierto):**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es abierto, si todos sus puntos son interiores

**ejemplo:**  $U = \{(x, y) / x > 3\}$  Mostrar que  $U$  es abierto

P.D:  $U$  es abierto

Sea  $(x_0, y_0) \in U$  P.D:  $(x_0, y_0)$  es interior

Si  $(x_0, y_0) \in U$  P.D:  $\exists B((x_0, y_0); r) \subseteq U$

P.D:  $\exists r > 0$  tal que  $(x, y) \in B((x_0, y_0); r) \Rightarrow (x, y) \in U$

Sean  $r = x_0 - 3 > 0$ ,  $(x, y) \in B((x_0, y_0); r)$

$$\Rightarrow \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < x_0 - 3$$

Pero,

$$\sqrt{(x-x_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2} < x_0 - 3$$

$$\Rightarrow |x-x_0| < x_0 - 3$$

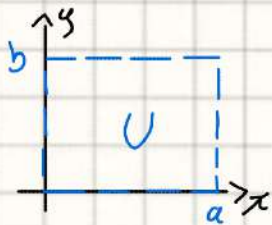
$$\Rightarrow -(x_0 - 3) < x - x_0 < x_0 - 3$$

$$\Rightarrow 3 < x$$

$$\Rightarrow (x, y) \in U //$$

Observación:  $\mathbb{R}^n$  y  $\emptyset$ : son abiertos

**ejemplo:** Demostrar que  $U = \{(x, y) / 0 < x < a; 0 < y < b\}$  es abierto



P.D:  $U$  es abierto

Sea  $(x_0, y_0) \in U$  P.D:  $(x_0, y_0)$  es interior

Si  $(x_0, y_0) \in U$  P.D:  $\exists B((x_0, y_0); r) \subseteq U$

P.D:  $\exists r > 0$  tal que  $(x, y) \in B((x_0, y_0); r) \Rightarrow (x, y) \in U$

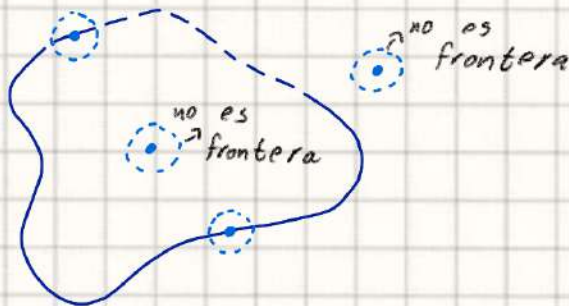
Sea  $r = \min\{x_0, y_0, a - x_0, b - y_0\}$



**Definición (conjunto cerrado):**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es cerrado si su complemento es abierto.

**observación:**  $\mathbb{R}^n$  y  $\emptyset$  son cerrados.  $\rightarrow$  Son los 2 únicos conjuntos que cumplen ambas definiciones

**Definición (Punto frontera):** Sean  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (no necesariamente en el conjunto). Se dice que  $x_0$  es un punto frontera si toda bola centrada en  $x_0$  tiene puntos en  $U$  y puntos que no están en  $U$ .



**Definición (Frontera):** La frontera de un conjunto es el formado por todos los puntos frontera. se le denota con  $\Gamma$ .

**Teorema:**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es cerrado si y solo si

$$U \cap \Gamma = \Gamma \quad (\Leftrightarrow) \quad \Gamma \subseteq U$$

**Teorema:**  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es abierto si y solo si

$$U \cap \Gamma = \emptyset$$

Que un conjunto no sea cerrado no implica que sea abierto y viceversa.

**Definición (conjunto Acotado):** Un subconjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es acotado si existe  $B(x_0, r)$  tal que  $U \subseteq B(x_0, r)$ .

**Definición (compacto):** Un subconjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es compacto si es cerrado y acotado.

**Definición (Conjunto conexo):** Un conjunto se dice que es conexo si a 2 puntos dentro de este, se pueden unir con una curva completamente contenida en el conjunto.

**Definición (Conjunto convexo):** Un conjunto se dice que es convexo si a 2 puntos dentro de este, se pueden unir con un segmento de recta completamente contenida en el conjunto.

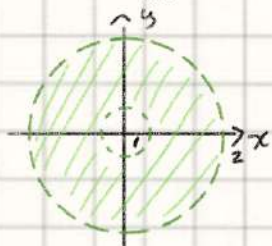
**Definición (Vecindad):** Vecindad de un punto es cualquier conjunto abierto que lo contiene.



07/10/2025

**Ejercicios:** Caracterizar a los siguientes conjuntos. En el caso de que se considere abierto, cuál es el máximo valor de  $r$  para que un punto sea interior.

1.  $U = \{(x, y) / 1 < x^2 + y^2 < 4\}$



frontera:  $\Gamma = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$

$U \cap \Gamma = \emptyset \Rightarrow U$  es abierto

si  $x_0 \in U$ : interior:  $r = \min\{2 - \|x_0\|; \|x_0\| - 1\}$

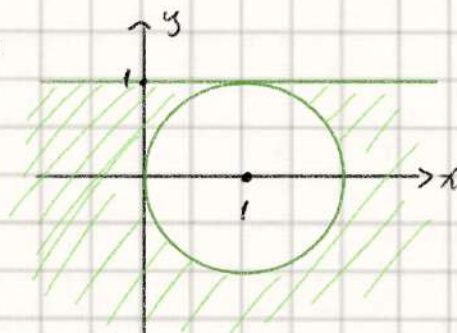
$U$  es acotado

$U$  no es compacto

$U$  es conexo pero no convexo

2.  $U = \{(x, y) / x^2 + y^2 \geq 2x; y \leq 1\}$

•  $x^2 + y^2 \geq 2x$ :  $x^2 + y^2 = 2x$   
 $x^2 - 2x + y^2 = 0$   
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$   
 $(x-1)^2 + y^2 = 1$



•  $y \leq 1$

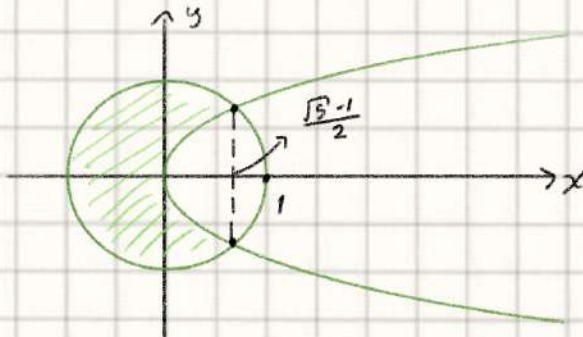
$\Gamma = \{(x, y) / y = 1\} \cup \{(x, y) / x^2 + y^2 = 2x\}$

$U \cap \Gamma = \Gamma \Rightarrow U$  es cerrado



$$3.- U = \{(x, y) / x \leq y^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- $x \leq y^2 : x = y^2$  (1) (parábola horizontal)
- $x^2 + y^2 \leq 1 : x^2 + y^2 = 1$  (2) (circunferencia con centro (0,0) y  $R=1$ )



Puntos de intersección:

(1) en (2)

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Gamma = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1; -1 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\} \cup \{(x, y) / x = y^2; 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$$

$$U \cap \Gamma = \Gamma \Rightarrow U \text{ es cerrado}$$

$U$  es acotado

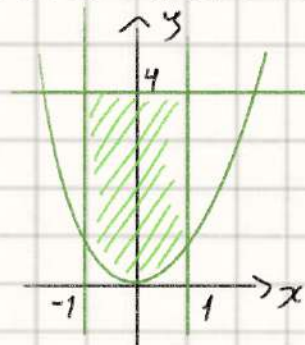
$U$  es conexo

$U$  es convexo

$U$  es compacto  $\ddot{=}$

$$4.- U = \{(x, y) / y \geq x^2; -1 \leq x \leq 1; y \leq 4\}$$

- $y \geq x^2 : y = x^2$  (parábola hacia arriba)
- $-1 \leq x \leq 1$
- $y \leq 4$



$$\Gamma = \{(x, y) / y = x^2, -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, y) / x = -1; 1 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) / x = 1; 1 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) / y = 4; -1 \leq x \leq 1\}$$

$$U \cap \Gamma = \Gamma \Rightarrow U \text{ es cerrado}$$

$U$  es acotado

$U$  es compacto

$U$  es conexo

$U$  es convexo

Que un conjunto sea convexo implica que es conexo, pero el recíproco no necesariamente se cumple.

$$5. U = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 0\} = \emptyset$$

# Límites y Continuidad

Para las diferentes funciones (trayectorias, campos escalares y funciones vectoriales) la definición de límite es similar a la dada en funciones reales.

Para una función real de variable real:

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Observación: esta definición sirve para demostrar límites, pero no para calcularlos.

Para el cálculo de los límites, se utilizan las propiedades, como por ejemplo:

- ✓ El límite de un polinomio es el polinomio evaluado en el punto
- ✓ El límite de una función exponencial es la función evaluada en el punto
- ⋮
- ✓ El límite de la suma es la suma de los límites
- ⋮

Límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



Trayectorias:  $\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = X(t)$$

El límite cuando  $t$  tiende a  $t_0$ , se denota y define por:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L \text{ ssi } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\alpha(t) - L\| < \epsilon$$

Observación:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (x_1(t), \dots, x_n(t))$

es un teorema ☺

$$= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \right)$$

se usa la norma, pues  $L$  es un vector

se puede usar cualquier norma, pues en análisis se prueba que todas las normas son equivalentes

**ejemplo:**  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( e^{t-1}; \frac{\sin(2t)}{t}; \frac{\cos(t)-1}{t} \right)$

$$= \left( \lim_{t \rightarrow 0} e^{t-1}; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t)}{t}; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t)-1}{t} \right)$$

$$= (e^{-1}; 2; 0)_{//}$$

Si no existe el límite de una de las componentes, no existe el límite del vector.

Campos escalares:  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ ssi } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

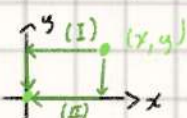
Observación: Para el cálculo de los límites, se tiene que las propiedades son similares a las de el límite en funciones reales. Por otro lado, en algunos casos, se pueden usar cambios de variables o aproximaciones de la función para determinar el valor del límite.

**Observación:** en el caso de funciones reales, al tomar el límite, se podría "acercar" al punto por la izquierda o por la derecha (límites laterales). En los campos escalares, esta noción ya no existe, puesto que existen "infinitas" formas de acercarse al punto. Como por ejemplo:

- 1) A lo largo de la recta que pasa por  $x_0$  (límite radial).
- 2) Acercarse consecutivamente en direcciones paralelas (límites reiterados)
- 3) Cualquier curva que pase por  $x_0$ .

**Observación:** cuando el límite existe, no depende del camino por el que se esté acercando. Esto implica que si al calcular el límite por una forma da un valor, y al tomarlo por otro camino, da otro valor, el límite no existe.

**ejemplo:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x-y}{x+y} \right)$

✓ Límites reiterados: 

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0-y}{0+y} \right) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-0}{x+0} \right) = 1 \end{aligned}$$

Dado que  $(I) \neq (II)$ , el límite no existe.



**ejemplo:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \right)$

Que los límites reiterados den el mismo valor, no implica que ese sea el valor.

♥ Límites reiterados:

$$(I) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(x-0)^2}{x^2+0} \right) = 1$$

$$(II) \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{(0-y)^2}{0+y^2} \right) = 1$$

♥ Límite radial: recta que pasa por  $X_0 = (0,0)$ :  $y = mx$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-mx)^2}{x^2+mx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-m)^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{(1-m)^2}{1+m^2}$$

∴ El límite no existe, pues este depende de  $m$ .

08/10/2025

**ejemplos:**

$$1.- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^x y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^x \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$2.- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

♥ Límites reiterados:

$$(I) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0$$

$$(II) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0$$



✓ Límite radial: recta que pase por (0,0)

•  $y = mx$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot mx}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m}} = 0$$

Esto no quiere decir que el límite sea 0, solo da la sospecha de que esto podría ser cierto (pero no asegura nada).

Supongamos que el límite existe:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Probamos con la definición:

P.D:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$

P.D:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \epsilon$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}; \quad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Sea  $\delta = \epsilon$ , se cumple la definición, por lo tanto, el límite es 0.

3-  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

✓ Límites reiterados:

(I)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0$

(II)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

✓ Límite radial:  $y = mx$

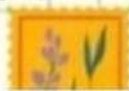
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{m^2 x^2 + x^2}{x + mx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x(1+m^2)}{1+m} \right) = 0$$

✓ Sea  $y = x^2 - x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (x^2-x)^2}{x + x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2x + 2 = 2$$

∴ el límite no existe.



$$4.- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

♥ Límites reiterados:

$$(I) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{2y}{\frac{1}{2}(y^2 + 1)2y} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} 2 \sqrt{y^2 + 1} = 2$$

$$(II) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \right) = 2$$

♥ Coordenadas polares:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \end{cases}$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 1} - 1} = \lim_{r \rightarrow 0} 2\sqrt{r^2 + 1} = 2 : \text{independiente de } \theta.$$

$$5.- \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta}{r} = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta : \text{depende de } \theta$$

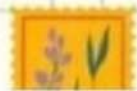
coord. polares

∴ el límite no existe =

### Cálculo de límites con aproximaciones

Calcular el límite de una función es analizar el comportamiento de la misma en una vecindad del punto  $x_0$ . Si se tiene una aproximación de la función, esta tendrá un comportamiento similar a la función.

- ♥  $\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha; \alpha \approx 0$
- ♥  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \alpha \approx 0$
- ♥  $e^\alpha \approx 1 + \alpha; \alpha \approx 0$
- ♥  $\ln(1 + \alpha) \approx \alpha; \alpha \approx 0$



**ejemplo:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} \stackrel{\text{aproximación}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x} = 0$

**ejemplo:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y^2-4)}{(y+2) \operatorname{sen} x} \stackrel{\text{aprox}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x^3 (y^2-4)}{x(y+2)}$   
 $\stackrel{\text{aprox}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x^2 (y-2)(y+2)}{(y+2)} = 0$

**ejemplo:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \stackrel{\text{aproximación}}{=} A^B = e^{B \ln(A)}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2} \ln(1+x^2y^2)}$

$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$

$= e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$

*polares*  
 $= e^{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2}}$

$= e^{\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta}$

$= e^0 = 1$

**Continuidad:** f se dice que es continua en  $x_0$  si y solo si  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**ejemplo:**  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esta función es continua en todo el plano  $\cup$

**ejemplo:**  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$



**ejemplo:**  $f(x, y) = \begin{cases} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

No es continua, pues el límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  es 1

13/10/2025

**Campos Vectoriales:** Sea  $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $x \mapsto F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < \underbrace{\|x - x_0\|}_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \underbrace{\|F(x) - L\|}_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$

**Teorema:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \right)$

donde  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f_i(x)$

# Derivación

**Trayectorias:**  $\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = X(t)$

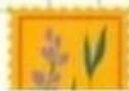
c:  $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$

La derivada de  $\alpha$  se denota y define por:

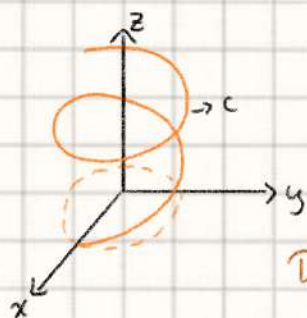
$\alpha'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0+h) - \alpha(t_0)}{h}$

Si la derivada existe, entonces:

$\alpha'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{x_1(t_0+h) - x_1(t_0)}{h} \\ \vdots \\ \frac{x_n(t_0+h) - x_n(t_0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix}$



**ejemplo:**  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $t \mapsto \alpha(t) = (a \cos t; a \sin t; bt)$



$$c: \begin{cases} \alpha_1 = a \cos t \\ \alpha_2 = a \sin t \\ \alpha_3 = bt \end{cases}$$

Derivada:  $\alpha'(t) = (-a \sin t; a \cos t; b)$

**Aplicación:**

$\alpha'(t_0)$  es tangente a la trayectoria

$\Rightarrow$  Recta tangente a la trayectoria es:

$$L: X = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$$

**ejemplo:**  $x^2 - y^2 = 1$  (hipérbola)



Parametrización:

$$c: \begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha(t) = (\cosh(t); \sinh(t))$$

Hallar la ecuación de la recta tangente en  $P_0 = (1, 0)$

- ♥ Si  $t_0 = 0 \Rightarrow P_0 = \alpha(t_0) = \alpha(0) = (\cosh(0); \sinh(0)) = (1; 0)$
- Derivada:  $\alpha'(t) = (\sinh(t); \cosh(t))$
- ♥ en  $t_0 = 0: \alpha'(t_0) = \alpha'(0) = (0, 1)$
- Recta tangente:  $X = (x, y) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$   
 $(x, y)^T = (1, 0)^T + (t - 0)(0, 1)^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$$

**Observación:** En el caso de funciones reales  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto y = f(x)$

Para que  $f$  sea derivable, se necesita que  $f$  sea continua (en el punto de derivabilidad).

Para que  $\alpha$  sea derivable, es necesario que sea continua.

**Observación:** Para que una función <sup>real</sup> sea derivable, el Teorema del Valor Medio indica:

$$\text{si } f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En el caso de las trayectorias, este resultado no es válido.

↳ **Contra ejemplo:**  $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ b t \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(t) = (-a \sin t; a \cos t; b)$$

Si el Teorema de Valor Medio fuese cierto,

$$\Rightarrow \exists c \in (0, 2\pi) : \alpha'(c) = \frac{\alpha(2\pi) - \alpha(0)}{2\pi - 0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a \sin c \\ a \cos c \\ b \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2\pi b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a \sin c \\ a \cos c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \exists c \in (0, 2\pi) = \begin{cases} \sin c = 0 \\ \cos c = 0 \end{cases} \quad \nabla \swarrow$$

**Aplicación:**

Longitud de arco:  $S = \ell(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt$

**ejemplo:**  $\alpha(t) = (a \cos t; a \sin t; bt); 0 \leq t \leq 2\pi$

♥  $\alpha'(t) = (-a \sin t; a \cos t; b)$

♥  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow S = \ell(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = t \sqrt{a^2 + b^2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Observación:** Si  $S = \ell(t)$  es inversible, entonces  $t = \ell^{-1}(S)$ .  
 La curva se puede reparametrizar con  $S$  como el "nuevo" parámetro:  
 posición en términos de  $t$   $C: \alpha = \alpha(t) \Leftrightarrow C: \beta = \alpha[\ell^{-1}(S)] = \beta(S)$  posición en términos de dist. recorrida

**ejemplo:**  $S = \sqrt{a^2 + b^2} t \Leftrightarrow t = \frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

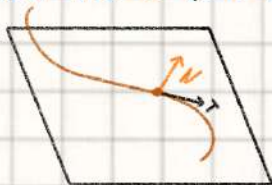
$$C: \alpha(t) = (a \cos t; a \sin t; bt) = (a \cos(\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}); a \sin(\frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}); b \frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}) = \beta(S)$$

**Observación:** Se tiene que  $\alpha'(t)$  es tangente

$$\Rightarrow T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} : \text{tangente unitario}$$

La derivada de  $T$  es "perpendicular" a  $T$ .

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} : \text{normal (principal)}$$



El plano definido por: Punto:  $\alpha(t_0)$

Vectores:  $T, N$ .

Se denomina **Plano Osculador** y es el plano que mejor se ajusta a la trayectoria.

**Observación:** Para "medir" como va "curvando" la trayectoria, se lo hace con la derivada del vector tangente con respecto a la longitud de arco.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = T' \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = T' \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= T' \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \frac{\|T'\|}{\|T'\|} \\ &= \frac{T'}{\|T'\|} \cdot \frac{\|T'\|}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\|T'\|}{\|\alpha'(t)\|} N \end{aligned}$$

Donde  $K = \frac{\|T'\|}{\|s'\|}$  se denomina: **curvatura**

El recíproco:  $\rho = \frac{1}{K}$  se denomina: **radio de curvatura**

La circunferencia de radio  $\rho$  ubicado en el plano osculador y el centro sobre la recta normal se denomina **circulo osculador** y es el que mejor se ajusta a la curva.



14/10/2025

**Ejercicio:** Encontrar la curvatura de una curva plana

$$\alpha(t) = (x(t); y(t)) *$$

$$\Rightarrow \alpha' = (x'; y')$$

$$\|\alpha'\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \left( \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)$$

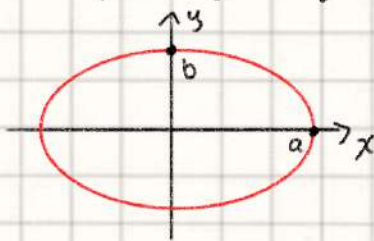
$$\Rightarrow T' = \left( \frac{y''x' - x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}; \frac{x''y' - x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right)$$

$$\Rightarrow \|T'\| = \frac{|y'x'' - x'y''|}{x'^2 + y'^2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\|T'\|}{\|\alpha'\|} = \frac{|y'x'' - x'y''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

**Ejercicio:** Encontrar los puntos de máxima y mínima curvatura en un elipse.\*

Elipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



curvatura:  $K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

$$K = \frac{|ab \sin^2 t + ab \cos^2 t|}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$
$$= \frac{|ab|}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}; 0 \leq t \leq 2\pi *$$

Parametrización:

$$C: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Puntos críticos:

$$K' = \frac{3ab \sin t \cos t (b^2 - a^2)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

Si  $K' = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pi, t = 2\pi,$   
 $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} x' = -a \sin t \\ y' = b \cos t \end{cases}; \begin{cases} x'' = -a \cos t \\ y'' = -b \sin t \end{cases}$$

Por el teorema de Weierstrass, que indica que una función continua, definida en un intervalo cerrado, esta siempre tiene un valor máximo y mínimo.

Nota: las cosas señaladas con \* deben ir en el formulario.



Para determinar los puntos donde se tiene el máximo y el mínimo, se analizan los extremos del intervalo y los puntos críticos.

**ejercicio:** Determine la curvatura de la curva que es la gráfica de una función.\*

$$y = f(x); a \leq x \leq b$$

$$c: \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = f''(x) \end{cases}$$

**ejercicio:** Encontrar la máxima curvatura en una parábola.

$$\text{Ecuación canónica: } x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p} : \text{función}$$

$$y' = \frac{x}{2p}; y'' = \frac{1}{2p}$$

$$\Rightarrow k = \frac{|\frac{1}{2p}|}{(1 + \frac{x^2}{4p^2})^{3/2}} \quad \text{en } x=0, \text{ el valor de } k \text{ es máximo}$$

$\Rightarrow$  en  $x=0$ : vértice  $\Rightarrow$  la máxima curvatura se da en el vértice //

**ejercicio:** Calcule la curvatura de una curva polar.\*

$$\text{curva polar: } r = r(\theta)$$

$$\text{Parametrización: } c: \begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = r' \cos \theta - r \sin \theta \\ y' = r' \sin \theta + r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = r'' \cos \theta - r' \sin \theta - r' \sin \theta - r \cos \theta \\ = r'' \cos \theta - 2r' \sin \theta - r \cos \theta \\ y'' = r'' \sin \theta + r' \cos \theta + r' \cos \theta - r \sin \theta \\ = r'' \sin \theta + 2r' \cos \theta - r \sin \theta \end{cases}$$



A: centro del círculo osculador.  
 $A = \alpha(t_0) + p \cdot N$  hay que revisar la dirección de N.



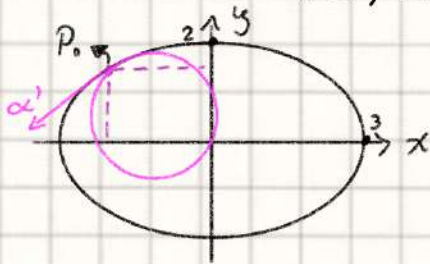
15/10/2025

$$K = \frac{|r'' \cos \theta - 2r' \sin \theta - r \cos \theta| (r' \sin \theta + r \cos \theta) - (r' \cos \theta - r \sin \theta) (r'' \sin \theta + 2r' \cos \theta - r \sin \theta)}{[(r' \cos \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2]^{3/2}}$$

:

$$K = \frac{|r'' r - 2r'^2 - r^2|}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

**ejercicio:** Hallar la ecuación del círculo osculador de la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  en el punto  $(-2; \frac{2}{3}\sqrt{5})$



Parametrización:

$$C: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

$$P_0 = (-2; \frac{2}{3}\sqrt{5})$$

$$\hookrightarrow t_0 = 2.3 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t_0 = -\frac{2}{3} \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

♥ Vector tangente:  $\alpha' = (x'; y') = (-3 \sin t; 2 \cos t)$   
 en  $t = t_0 = 2.3 \text{ rad}$ :  $\alpha' = (-3 \sin t_0; -3 \cos t_0)$   
 $= (-\sqrt{5}; -\frac{4}{3})$

♥ Vector normal:  $N = (\frac{4}{3}; -\sqrt{5}) \Rightarrow$  normal unitario:  $n = \frac{N}{\|N\|} = (\frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{61}})$   
 $\|N\| = \frac{\sqrt{61}}{3}$

♥ Curvatura:  $\begin{cases} x' = -3 \sin t \\ y' = 2 \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -3 \cos t \\ y'' = -2 \sin t \end{cases}$

$$\Rightarrow K = \frac{|-6 \cos^2 t - 6 \sin^2 t|}{(9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{6}{(9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t)^{3/2}}$$

♥ Radio de curvatura:  $\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{6} (9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t)^{3/2}$

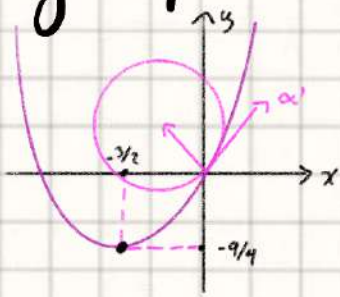
♥ Centro del círculo osculador:

$$A = \alpha(t_0) + \rho \cdot n = \left(-2; \frac{2}{3}\sqrt{5}\right) + \rho \left(\frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{61}}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

♥ En el círculo:  $(x - x_1)^2 + (y - x_2)^2 = \rho^2$

**ejemplo:**

$$y = x^2 + 3x$$



♥ Parametrización:  $C:$

$$x = x$$

$$y = x^2 + 3x$$

♥ Vector tangente:  $\alpha' = (1; 2x + 3)$   
en  $P_0 = (0, 0): \alpha' = (1, 3)$

♥ Vector normal:  $N = (-3; 1); \|N\| = \sqrt{10}$

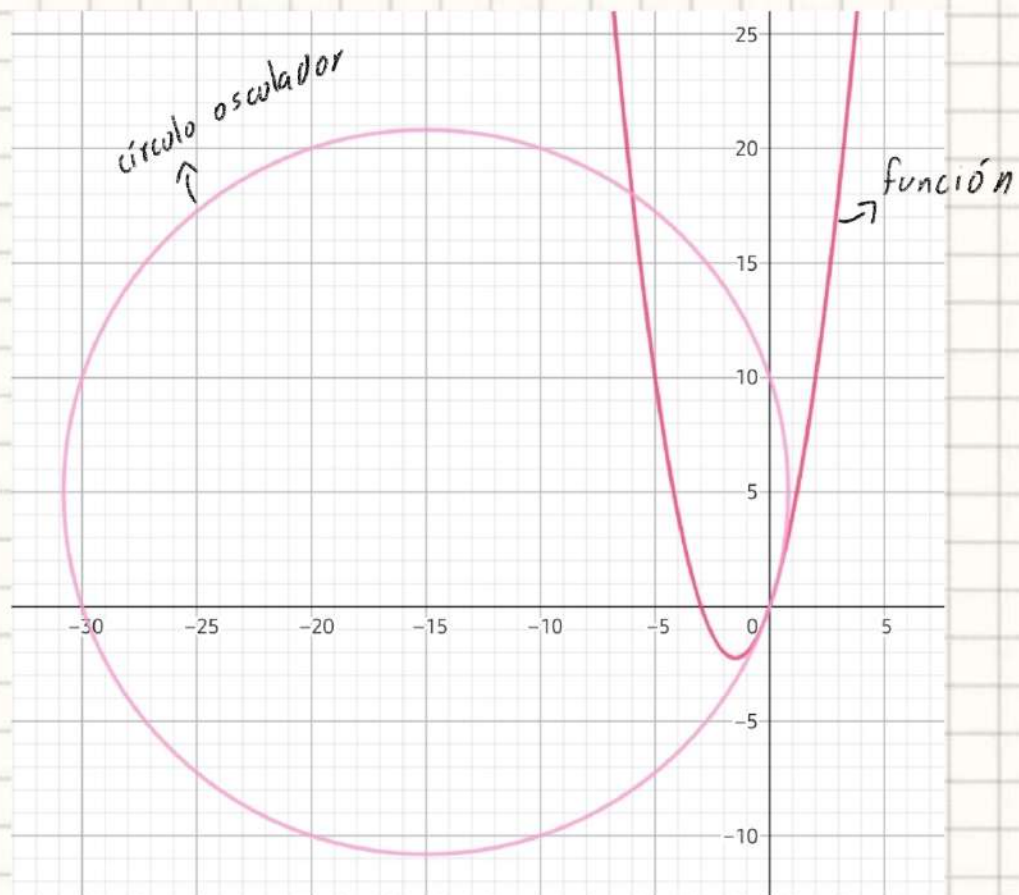
♥ Normal unitario:  $n = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

♥ Curvatura:  $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{[1+(2x+3)^2]^{3/2}}$  : con  $P_0 = (0; 0) = k = \frac{2}{10^{3/2}}$

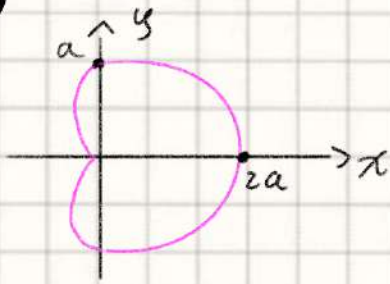
♥ Radio de curvatura:  $\rho = \frac{10^{3/2}}{2}$

♥ Centro del círculo osculador:  $A = P_0 + \rho n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10^{3/2}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}$

♥ Ecuación del círculo:  $(x+15)^2 + (y-5)^2 = 250$



**ejemplo:** Cardiode:  $r = a(1 + \cos \theta)$ ; círculo osculador en  $P_0 = (0; a)$



♥ Parametrización:

$$c: \begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \text{En } P_0 = (0, a): \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

♥ Vector tangente:  $\alpha' = (-a \sin \theta - 2a \cos \theta \sin \theta; a \cos \theta - a \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta)$   
 $\hookrightarrow$  En  $P_0 = (0, a): \theta_0 = \frac{\pi}{2}: \alpha' = (-a; -a)$

♥ Vector normal:  $N = (1, -1)$

♥ Vector normal unitario:  $n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

♥ Curvatura:  $K = \frac{|-3a^2(\cos \theta + 1)|}{[2a^2(1 + \cos \theta)]^{3/2}} = \frac{3a^2(\cos \theta + 1)}{2\sqrt{2}a^3(1 + \cos \theta)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}a(1 + \cos \theta)^{1/2}}$

$$\hookrightarrow \text{En } \theta_0 = \frac{\pi}{2}: r = a \Rightarrow K = \frac{3}{2\sqrt{2}a}$$

♥ Radio del círculo osculador:  $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$

♥ Centro del círculo osculador:  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{2}a}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ -\frac{1}{3}a \end{pmatrix}$

♥ Ecuación del círculo:  $\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}a^2$



## ejercicio:

## Deber 3

8. A una carretera y una de sus rampas de salida se sobrepone un sistema coordenado rectangular de manera que la carretera coincide con el eje  $x$ . La rampa de salida comienza en el origen  $O$  y su trayectoria sigue la curva  $y = -\frac{1}{27}x^3$  entre  $O$  y el punto  $P(3, -1)$ ; luego continúa a lo largo de un arco de circunferencia. Encuentre el centro del arco de circunferencia para que la curvatura sea continua en  $x=3$  (es decir, en el punto  $P(3, -1)$ ).

$P$ : curvatura continua

$\Rightarrow$  Curvatura de la curva  $y = -\frac{x^3}{27}$  debe ser igual a la curvatura de la circunferencia

$\heartsuit$  Curvatura de  $y = -\frac{x^3}{27}$  en  $(3; -1)$   
 $\hookrightarrow$  curva: gráfica de una función

$$\bullet K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \bullet y = -\frac{x^3}{27} \quad \bullet y' = -\frac{x^2}{9}$$

$$\bullet y'' = -\frac{2x}{9}$$

$$\text{en } P = (3; -1): y = -1; y' = -1; y'' = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\frac{2}{3}}{(1+1)^{3/2}} = \frac{\frac{2}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$  Curvatura del círculo osculador:

$\Rightarrow$  radio círculo osculador:  $\rho = 3\sqrt{2}$

$\bullet$  Centro del círculo:  $A$

$\bullet$  Recta normal:

en  $P$ : pendiente a la recta tangente

$$\heartsuit m = y' = -1$$

$\Rightarrow$  pendiente de la recta normal:

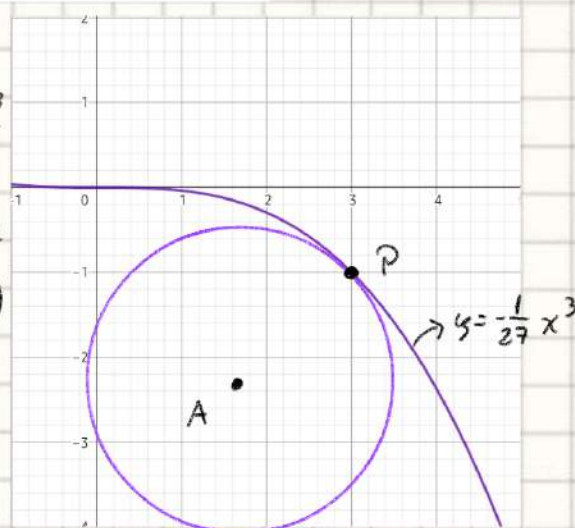
$$\heartsuit m_1 = -\frac{1}{m} = 1$$

$\Rightarrow$  Vector normal:

$$N = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{normal unitario} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\bullet$  Centro:

$$A = P + \rho \vec{n} \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$



• Centro del círculo:  $x^2 + (y+4)^2 = 18$

## - Problemas de movimiento

Cuando una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una recta  $\ell$ , bajo una acción de un campo de fuerzas  $F$ , si su posición está dada por  $\alpha = \alpha(t)$ , entonces su velocidad está dada por  $v = \alpha'$  y su aceleración es  $a = v' = \alpha''$

Si se conoce la fuerza que actúa sobre la partícula, por "integración", se puede determinar la trayectoria que sigue ( $F = m\alpha''$ )

**ejemplo:**  $F$ : constante; movimiento en  $\mathbb{R}^3$   
 $F = K = (k_1, k_2, k_3)$

Si  $\alpha(t) = (x(t); y(t); z(t)) = X(t)$   
 $\Rightarrow \alpha' = (x', y', z') \Rightarrow \alpha'' = (x'', y'', z'')$

Por las leyes de Newton:  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$

♥ Integrando:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_1 t \\ k_2 t \\ k_3 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

♥ Condición inicial:  $t=0: V=V_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = V_0$   
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{t}{m} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix}$

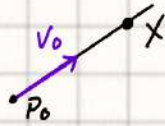
∴  
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{t^2}{2m} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Posición:  $X = \frac{t^2}{2m} F + tV_0 + P_0$

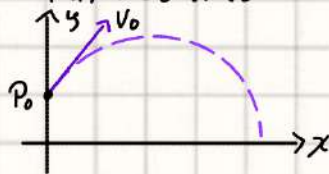


### Caso Particular:

- i) Si  $F=K=0 \Rightarrow$  Posición:  $X = P_0 + tV_0$   
 Velocidad:  $V = V_0$  : si no existe fuerza,  $V_0 = \text{cte}$



### ii) Mov. Parabólico:



Posición:  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$   
 Fuerza:  $F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$   
 $\hookrightarrow$  Peso: cte

Posición:  $X = \frac{t^2}{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + tV_0 + P_0$

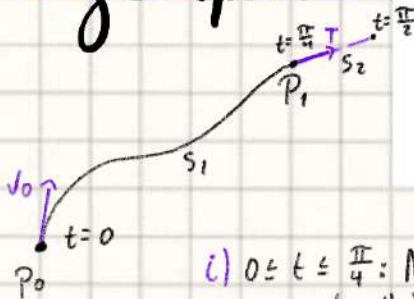
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{t^2}{2}g \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tV_{0x} + x_0 \\ y = -\frac{t^2}{2}g + tV_{0y} + y_0 \end{cases}$$

### ejemplo:

#### Deber 4

8. Una partícula de masa  $m = 1$ , que se encuentra en el punto  $(1, 0, 0)$ , parte con velocidad inicial  $(0, 1, 0)$ , bajo la acción de un campo de fuerzas de la forma:

$F(t) = (-4\cos(2t), -4\sin(2t), 4)$ . En el instante  $t = \frac{\pi}{4}$  se escapa por una tangente a su trayectoria (a partir de ese momento ninguna fuerza actúa sobre ella). Entre los instantes  $t = 0, t = \frac{\pi}{2}$ , determine la distancia recorrida.



- i)  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ : Newton:  $F = ma = a$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cos 2t \\ -4 \sin 2t \\ 4 \end{pmatrix}$$

• Integrando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ 2 \cos 2t \\ 4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

en  $t=0$ :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  Velocidad:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ 2 \cos 2t - 1 \\ 4t \end{pmatrix}$

• Integrando nuevamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t - t \\ 2t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{En } t=0: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Posición: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t - t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$$

$$(c) t \geq \frac{\pi}{4}: F=0$$

- Velocidad de escape:  $V_1 = \begin{pmatrix} -2 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \\ 2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) - 1 \\ 4(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}$

- Punto de escape:  $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi^2}{8} \end{pmatrix}$

- Posición:  $X = P_1 + t V_1 \Leftrightarrow X = P_1 + (t - \frac{\pi}{4}) V_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi^2}{8} \end{pmatrix} + (t - \frac{\pi}{4}) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}$$

Distancia recorrida:  $S = S_1 + S_2$

$$S_1 = \int_0^{\pi/4} \|\alpha'\| dt ; \alpha = X(t)$$

$$S_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \|\alpha'\| dt ; \alpha = X(t)$$



# ejemplo:

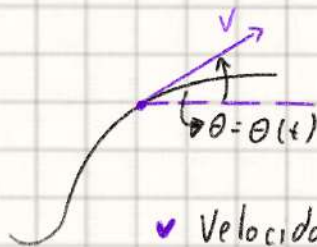
## Deber 4

15. Una partícula se mueve a lo largo de una curva con rapidez constante igual a 2. El movimiento empieza en el origen cuando  $t=0$  y el vector velocidad inicial es  $V(0) = 2\vec{i}$ . Se sabe que en cada instante la curvatura es  $\kappa(t) = 4t$ . Encuentre el vector velocidad cuando  $t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ , si la curva nunca está debajo del eje  $x$ .

↳ Esto implica que el valor de  $y$  siempre es no negativo.

- Posición:  $X = (x(t); y(t))$
- Velocidad:  $V = (x'; y')$
- Rapidez:  $v = \|X'\| = (x'^2 + y'^2)^{1/2} = 2$

Sea  $\theta$  una función del tiempo que representa el ángulo de la velocidad con la trayectoria.



$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = 2 \cos \theta \\ V_y = 2 \sin \theta \end{cases}$$

✓ Velocidad:  $V = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix} = X'$

✓ Curvatura:  $\kappa = \frac{|x''y' - x'y''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

Como:  $\begin{cases} x' = 2 \cos \theta \\ y' = 2 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -2 \sin \theta \cdot \theta' \\ y'' = 2 \cos \theta \cdot \theta' \end{cases}$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{|(-2 \sin \theta \cdot \theta')(2 \sin \theta) - (2 \cos \theta)(2 \cos \theta \cdot \theta')|}{2^3}$$

$$= \frac{4\theta'}{8} = \frac{\theta'}{2} = 4t \Rightarrow \theta' = 8t \Rightarrow \theta = 4t^2 + c$$

• En  $t=0$ :  $V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \theta = 4t^2$

⇒ Velocidad:  $V = \begin{pmatrix} 2 \cos(4t^2) \\ 2 \sin(4t^2) \end{pmatrix}$

✓ Si  $t = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Rightarrow V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 \cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \\ 2 \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \end{pmatrix}$



27/10/2025

# Campos Escalares

Vamos a considerar funciones de la forma:

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

**Objetivo:** analizar el comportamiento de  $f$  en un punto  $x_0$  y su vecindad.

**ejemplo:** Supongamos que  $f$  representa la temperatura en un cuarto que tiene calefacción y una ventana abierta.

Si desde un punto  $x_0$  nos movemos en dirección al calefactor, sentiremos que la temperatura aumenta, pero si nos movemos hacia la ventana, la temperatura disminuirá.

Es decir, la variación de la temperatura dependerá de la dirección en la que nos desplazemos.

Se desea analizar la variación de  $f(x)$  cuando hay un desplazamiento en la dirección  $\gamma$ .

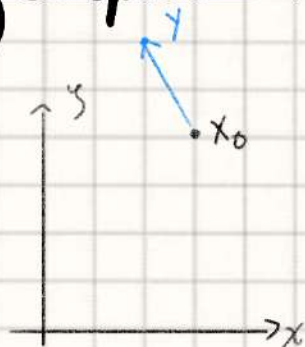
Se define la derivada de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $\gamma$ :

$$f'(x_0; \gamma) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h\gamma) - f(x_0)}{h}$$

Si la dirección  $\gamma$  es unitaria ( $\|\gamma\|=1$ ), se denomina derivada direccional de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $\gamma$  y representa la tasa o rapidez de variación de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $\gamma$ .



**ejemplo:**  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  ;  $X_0 = (3, 4)$  ;  $Y = (-1, 2)$



$$\begin{aligned} f'(3, 4; -1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3, 4) + h(-1, 2) - f(3, 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h; 4+2h) - f(3, 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3-h)^2 - 2(3-h)(4+2h) + (4+2h)^2] - [9 + 24 - 4]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[9 - 6h + h^2 - 24 - 12h + 4h + 4h^2 + 4 + 2h - 9 + 24 - 4]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5h^2 - 12h]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [5h - 12] = -12 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$f, g$  debe ser derivable

**Teorema:** sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto g(t) = f(x + tY)$

Entonces:

$$g'(t) = f'(x + tY; Y)$$

si  $t=0$ :

$$g'(0) = f'(x; Y)$$

En el ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Sea } g(t) &= f(x + tY) = f(x, y) + t(a, b) \\ &= f(x + at; y + bt) \\ &= (x + at)^2 - 2(x + at)(y + bt) + (y + bt)^2 \end{aligned}$$

$$g'(t) = 2a(x + at) - 2a(y + bt) - 2b(x + at) + 2b$$

$$g'(0) = 2a(x + 0) - 2a(y + 0) - 2b(x + 0) + 2b$$

$$= 2ax - 2ay - 2bx + 2b$$

$$= 2(-1)x - 2(-1)y - 2(2)x + 2$$

$$= -2x + 2y - 4x + 2$$

$$= -2(3) + 4 - 4(3) + 2$$

$$= -6 + 4 - 12 + 2$$

$$= -12 \quad \blacksquare$$

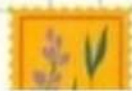
**Observación:** Para que exista la derivada de  $f$  en un punto  $X_0$ , no es necesario que la función sea continua.

**ejemplo:**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

♥ Límites reiterados: 0 (en ambos casos)

♥ Límite radial:  $y = mx$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{1 + m^4 x^2} = 0$$



♥ Si tomamos el límite a lo largo de la curva:  $x=y^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{El límite no existe}$$

$\Rightarrow f$  no es continua en  $x_0 = (0,0)$

Ahora, veamos si existe  $f'(x_0, y)$ .

Sea  $\gamma = (a, b)$

$$f'((0,0), (a,b)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(a,b)) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, hb) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ha(hb)^2}{(ha)^2 + (hb)^4}$$

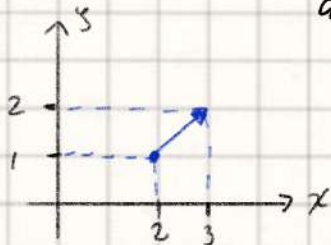
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ab^2}{a^2 + h^2 b^4} = \frac{b^2}{a} : a \neq 0$$

• Si  $a=0$ :  $f'((0,0), (0,b)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(0,b)) - f(0,0)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, hb) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f'(x_0, \gamma)$  existe ■

**ejemplo:** La altura de una montaña respecto a un plano cartesiano está dada por  $H(x,y) = x^2 + 2xy^2 - y$ . Parte del punto  $x_0 = (2, 1)$  y se va a mover al punto  $(3, 2)$ . ¿Con qué rapidez cambia la altura?



$\gamma = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|}$  Pues la rapidez de variación es la derivada direccional, y para esto, la dirección debe ser unitaria

$\gamma = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$

Con Teorema:  $f'(x_0, \gamma) = g'(0)$  donde  $g(t) = f(x + t\gamma)$

$$g(t) = (x + \frac{t}{\sqrt{2}})^2 + 2(x + \frac{t}{\sqrt{2}})(y + \frac{t}{\sqrt{2}})^2 - (y + \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$g'(t) = \frac{2}{\sqrt{2}}(x + \frac{t}{\sqrt{2}}) + \frac{2}{\sqrt{2}}(y + \frac{t}{\sqrt{2}})^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(x + \frac{t}{\sqrt{2}})(y + \frac{t}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

en  $t=0$ :  $g'(0) = \frac{2x}{\sqrt{2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{2}} + \frac{4xy}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

en  $x_0$ :  $f'((2,1); (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})) = \frac{12}{\sqrt{2}}$  m/m

# derivadas parciales

Si en la derivada direccional, la dirección se toma la del  $i$ -ésimo vector de la base canónica:  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ ; ( $\|e_i\|=1$ ), se obtiene la llamada **Derivada Parcial de  $f$**  en la dirección de la  $i$ -ésima variable, se denota:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_i f(x_0); f'_i(x_0)$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'(x_0; e_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

**ejemplo:**  $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y$

✓ Derivada parcial respecto a  $x$ :

• definición:  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y) + h(1, 0) - f(x, y)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 2(x+h)y^2 - y] - [x^2 + 2xy^2 - y]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2xy^2 + 2hy^2 - y - x^2 - 2xy^2 + y}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2hy^2}{h} = 2x + 2y^2$$

• Teorema: sea  $g(t) = f(x+ty)$

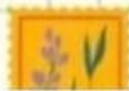
$$\begin{aligned} &= f(x, y) + t(1, 0) \\ &= f(x+t; y) \\ &= (x+t)^2 + 2(x+t)y^2 - y \\ g'(t) &= 2(x+t) + 2y^2 \end{aligned}$$

$$f'(x, y; e_1) = g'(0) = 2x + 2y^2$$

• Observación: ( $y$  cte)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y^2$$

Observación: como en la definición de derivada parcial, el límite afecta únicamente a la  $i$ -ésima variable, para su cálculo se usan las reglas de derivación conocidas, considerando a las demás variables como si fueran constantes.



**Definición (Gradiente):** Dado un campo escalar  $f$ , si existen sus derivadas parciales, se define el Gradiente como el vector que tiene por componentes a las derivadas parciales.

$$\text{Grad } f(x) = \nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x); \frac{\partial f}{\partial x_2}(x); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

**ejemplo:**  $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - 4$   
 $\text{Grad } f(x,y) = (2x + 2y^2; 2xy - 1)$

**Observación:** si existen todas las derivadas parciales (existe el gradiente) se dice que es derivable. Si además, todas son continuas (y la función también), es diferenciable.

$$f \in \mathcal{C}^1 \rightarrow \begin{matrix} 1^{\text{a}} \text{ derivada} \\ \text{continuas} \end{matrix}$$

28/10/2025

**Observación:** El diferencial de  $f$  es una transformación lineal, cuya matriz es:

$$\Rightarrow df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

**Teorema:** si  $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f'(x_0, y) = \nabla f(x_0) \cdot \gamma$

**ejemplo:**  $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x; x_0 = (0,0); \gamma = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .  
 Hallar la derivada direccional.

♥ Definición:  $f'(x_0; \gamma) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) - f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(-\frac{h}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{h}{\sqrt{2}})^2} - 1}{-\frac{h}{\sqrt{2}} - 1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{h}{\sqrt{2}} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{\sqrt{2} h} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$





♥ Teorema: Sea  $g(t) = f(x_0 + t\gamma)$

$$= f\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= e^{(-\frac{t}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{t}{\sqrt{2}})^2} - \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$= 1 - \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x_0 + t\gamma) = g'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

♥ Gradiente:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= (2x e^{x^2 - y^2} + 1; -2y e^{x^2 - y^2}) \text{ : es continua}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = (1; 0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0, \gamma) = \nabla f(x_0) \cdot \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Dirección y valor de máxima variación 1ª Aplicación de  $\nabla f$**

Sea  $f \in \mathcal{C}^1$ , entonces:

$$f'(x_0; \gamma) = \nabla f(x_0) \cdot \gamma$$

Por propiedad de producto escalar:

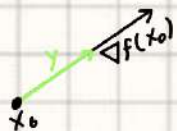
$$f'(x_0; \gamma) = \nabla f(x_0) \cdot \gamma = \|\nabla f(x_0)\| \|\gamma\| \cos \theta$$

Si se trata de la derivada direccional:  $\|\gamma\| = 1$

$\Rightarrow$  Tasa de variación:  $f'(x_0; \gamma) = \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta$   $\Rightarrow$  alcanza su máximo valor en  $\cos \theta = 1$  depende de  $\theta$ , pues  $x_0$  es un punto fijo

$\Rightarrow \theta = 0$

$\Rightarrow$  dirección  $\gamma$  y el gradiente son colineales con la misma orientación punto fijo

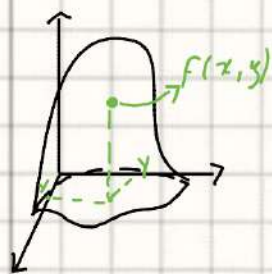


$\Rightarrow$  El gradiente da la dirección de máxima variación.

Por otro lado, la tasa de máxima variación es  $\|\nabla f(x_0)\|$ .



**ejemplo:**



Suponga que para un sistema cartesiano, la altura de una montaña está dada por  $f(x, y) = x^3 - xy^2 + 2y + 20$ . Si una persona se encuentra en el punto  $x_0 = (2, 3)$ . ¿En qué dirección debe moverse para subir o bajar más rápido?

**Observación:** la dirección contraria al gradiente da la tasa de variación mínima.

$$\text{Gradiente: } \nabla f = (3x^2 - y^2; -2xy + 2)$$
$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = (3; -10)$$

$$\text{La tasa máxima de variación: } \|\nabla f(x_0)\| = \sqrt{109} \text{ (m/m)}$$

## Plano tangente / Vector normal 2ª Aplicación de $\nabla f$

Una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  puede estar dada en forma explícita cuando es la gráfica de una función  $z = f(x, y)$  (cono:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Por otro lado, está dada de forma implícita cuando es la gráfica de una relación  $G(x, y, z)$  (cono:  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ). También puede estar dada de forma paramétrica:

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \mapsto \text{cono: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \end{cases}$$

**Observación:** si la superficie está dada de manera explícita, se la puede poner de forma implícita:

explícita  $z = f(x, y) \rightarrow G(x, y, z) = z - f(x, y) = 0 \rightarrow$  implícita  
El recíproco no siempre es cierto.

si la superficie está dada en forma implícita:  $G(x, y, z) = 0$ , entonces su gradiente es un vector normal a la superficie

$$N = \nabla G(x_0)$$

$\Rightarrow$  Ecuación del plano tangente a la superficie:

$$\nabla G(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

$\hookrightarrow$  un punto cualquiera del plano

**ejemplo:** Para el elipsoide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$ , halla el plano tangente en el punto  $X_0 = (1, 2, \frac{\sqrt{11}}{6})$ .

$$\nabla G(x, y, z) = \left( \frac{x}{2}; \frac{2y}{9}; 2z \right)$$

$$\Rightarrow \nabla G(X_0) = \left( \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{\sqrt{11}}{3} \right) = N$$

$$\Rightarrow \text{Ec. del plano: } \nabla G(X_0) \cdot (X - X_0) = 0$$

$$\left( \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{\sqrt{11}}{3} \right) \cdot \left( x-1; y-2; z - \frac{\sqrt{11}}{6} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{4}{9}(y-2) + \frac{\sqrt{11}}{3} \left( z - \frac{\sqrt{11}}{6} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{9}y - \frac{8}{9} + \frac{\sqrt{11}}{3}z - \frac{11}{18} = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{9}y + \frac{\sqrt{11}}{3}z - \frac{14}{9} = 0 \quad \blacksquare$$

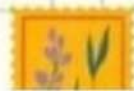
Si la superficie está dada de forma paramétrica, si se fija el valor de  $v = v_0$ , entonces las ecuaciones paramétricas de  $x, y, z$  van a depender solo de  $u$ . Entonces, esta va a ser una curva que va a estar contenida en la superficie.

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \Rightarrow \text{C}_i: \begin{cases} x = x(u_0, v) = x = x(v) \\ y = y(u_0, v) = y = y(v) \\ z = z(u_0, v) = z = z(v) \end{cases}$$

**Observación:** el vector formado por las derivadas  $T_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  es tangente a la curva, por lo tanto, es tangente a la superficie.

Por otro lado, si se fija el valor de  $u = u_0$ , las ecuaciones paramétricas van a depender solo de  $v$ , por lo que  $T_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right)$  es tangente a la curva y a la superficie. Así,

$$N = T_u \times T_v \rightarrow \text{Normal a } S$$



29/10/2025

## Aproximación lineal de una función 3ª Aplicación de $\nabla f$

Sea  $f \in \mathcal{C}^1$ : si  $X$  es "cercano" a  $X_0$ ,

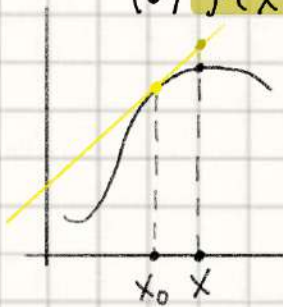
$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \|X - X_0\| \epsilon_1(X, X_0)$$

donde:  $\epsilon_1(X, X_0) \xrightarrow{X \rightarrow X_0} 0$

Si se desprecia el error:  $\rightarrow$  Aprox. de Taylor

$\hookrightarrow$  Error: va a ser pequeño, pues  $\epsilon_1$  tiende a 0 y  $\|X - X_0\|$  va a ser cercano a 0.

$$(\heartsuit) f(X) \approx f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)$$



de  $(\heartsuit)$ :  $f(X) - f(X_0) \approx \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)$

$$X = X_0 + \Delta X$$

$$f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) \approx \nabla f(X_0) \cdot \Delta X$$

$$\Delta f(X_0) \approx \nabla f(X_0) \cdot \Delta X$$

**Observación:** a partir de la aproximación anterior, el gradiente permite encontrar un valor aproximado a la aproximación de la función evaluada en la variable.

**ejemplo:**

Sea la función  $f(x, y, z) = x^2 y - y z^2 + x y z$

Sea  $X_0 = (1, -2, 3)$ ,  $\Delta X = (-0.1, 0.02, -0.01)$ .

Calcule de manera exacta y aproximada la variación que ocurre en la función.

$\heartsuit$  El "nuevo" valor de la variable con la variación es:

$$X = X_0 + \Delta X$$

$$= (0.9, -1.98, 2.99)$$

$\heartsuit$  Variación de la función:

$$\Delta f(X_0) = f(X) - f(X_0)$$

$$= 10.769 - 10$$

$$= 0.769$$

$\heartsuit$  Variación aproximada:  $\nabla f = (2xy + yz; x^2 - z^2 + xz; -2yz + xy)$

$$\nabla f(X_0) = (-10; -14; -10)$$

$$\Rightarrow \Delta f(X_0) \approx \nabla f(X_0) \cdot \Delta X$$

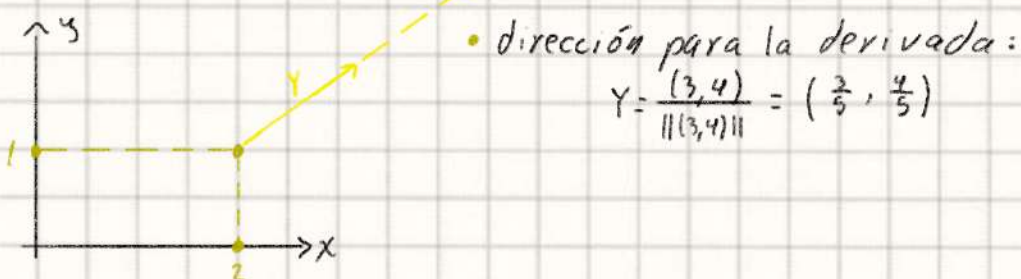
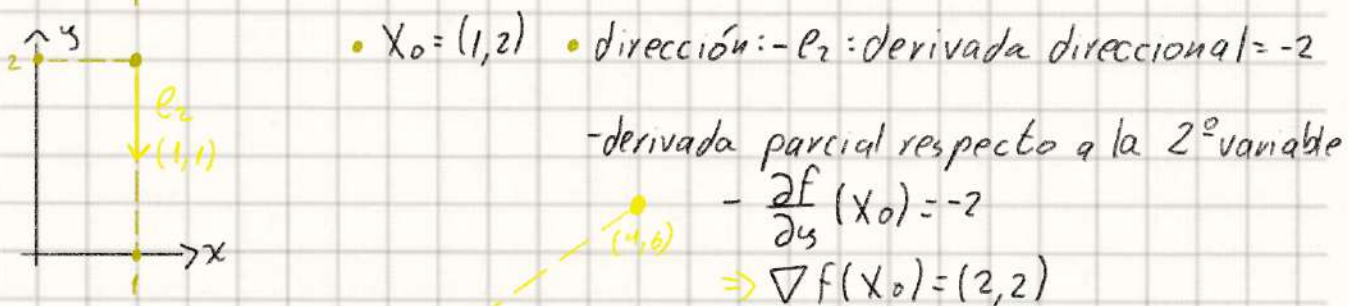
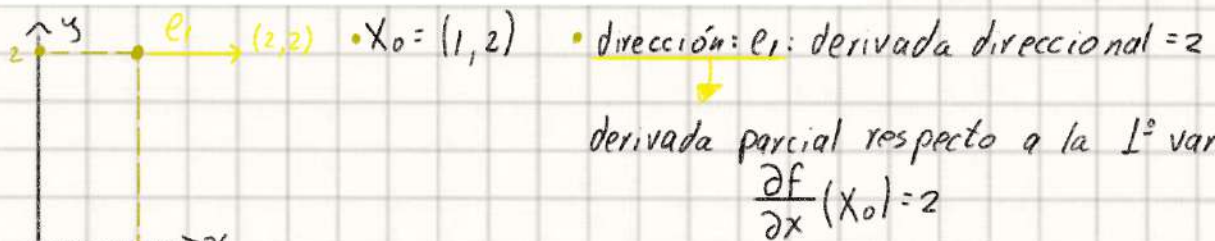
$$0.769 \approx (-10; -14; -10) \cdot (-0.1; 0.02; -0.01)$$

$$\approx 0.82 \quad \therefore \text{aprox. aceptable} \blacksquare$$

**ejemplo:** Encontrar un valor aproximado de  $\frac{(0.99)^{43} e^{0.02}}{2.01} \approx ?$

## ejercicios: (Deber 5)

7. Un campo escalar diferenciable  $f$  tiene, en el punto  $(1,2)$  las derivadas direccionales  $+2$  en dirección al punto  $(2,2)$  y  $-2$  en dirección al punto  $(1,1)$ . Determinar el vector gradiente en  $(1,2)$  y calcular la derivada direccional en dirección al punto  $(4,6)$ .



## Ejercicio 1

b)  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$  en  $(3,4,5)$  a lo largo de la curva de intersección de las dos superficies  $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$  y  $x^2 + y^2 = z^2$

$$\nabla G_1 = (4x, 4y, -2z)$$

$$\nabla G_2 = (2x, 2y, -2z)$$

en  $X_0 = (3, 4, 5)$ :  $N_1 = (12, 16, -10)$   
 $N_2 = (6, 8, -10)$

$$\Rightarrow T = N_1 \times N_2 = (-80, 60, 0)$$

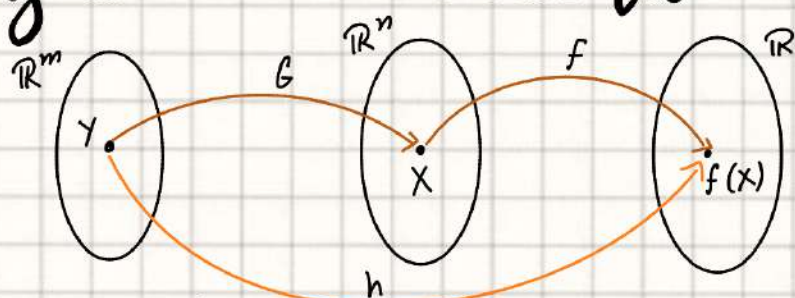
Derivada direccional:  $Y = \frac{T}{\|T\|} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(X_0, Y) &= \nabla f(X_0) \cdot Y \\ &= (6, 8, -10) \cdot \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) \\ &= -\frac{12}{5} \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación:** cuando una curva es la intersección de dos superficies y  $N_1, N_2$  son los vectores normales a las superficies, entonces  $T = N_1 \times N_2$  es tangente a la curva.

05/11/2025

# Regla DE LA Cadena



Sean las funciones

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

$$G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y \mapsto x = G(y)$$

$$h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto h(y) = (f \circ G)(y) = f(G(y))$$

diferenciables en  $X_0$  y  $Y_0$ ,  $f$  y  $G$  respectivamente.

Entonces,  $h$  es diferenciable. Además,

$$\frac{\partial h}{\partial y_j}(Y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_j}(Y_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_j}(Y_0)$$

**Observación:** En problemas prácticos, a la composición de funciones se la toma como cambios de variable.

$$x = G(y) \Leftrightarrow x = x(y)$$

## Cambio a coordenadas polares

Cuando una función  $f$  depende de coordenadas cartesianas, se tiene que  $f$  depende de  $x$  y  $y$  ( $f(x, y)$ ). Cuando se realiza el cambio a coordenadas polares con los cambios de variable  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Al reemplazar estos cambios de variable, se obtiene una "nueva" función que depende de  $r$  y  $\theta$  ( $g(r, \theta)$ ).

$$\text{si } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow f = f(x, y) = g(r, \theta) = g \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$  deben ser diferenciables

✓ derivada respecto a  $r$ :  $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$   
se evalúan en  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$   $= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$

✓ derivada respecto a  $\theta$ :  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$   
 $= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$

✓ derivada respecto a  $x$ :  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$   
se evalúa en  $(x, y)$   $= \frac{x}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta}$

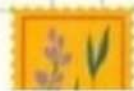
**ejemplo:** Teorema de Euler

Si  $f$  es homogénea de grado  $\alpha$ :  $f(tx) = t^\alpha f(x)$

$$\text{Entonces, } x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f$$

$\hookrightarrow$  evaluados en  $x$

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$$



## Demostración:

Si  $f$  es homogénea grado  $\alpha$ , entonces:  $f(tx) = t^\alpha f(x)$ ;  $t \geq 0$

Consideramos a  $X$  fijo  $\Rightarrow$  la expresión anterior depende de  $t$ .

$$\Rightarrow g(t) = f(tx) = t^\alpha f(x)$$

Suponiendo que son diferenciables, derivando respecto a  $t$  se obtiene:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

regla de la cadena

Evaluadas en  $tx = (tx_1, \dots, tx_n)$

$$\Rightarrow g'(t) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

$\hookrightarrow$  Evaluadas en  $tx$

$$\text{en } t=1: g'(1) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f(x)$$

$\hookrightarrow$  Evaluadas en  $x$

$$\Rightarrow x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x) \quad \blacksquare$$

**ejemplo:** Con el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

Resuelva la EDP  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$

Solución:  $f = f(x, y)$

Del cambio de variables:  $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(v - u) \end{cases}$

$$\Rightarrow f = f(x, y) = g(u, v) = g$$

♥ Derivando respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$



✓ Derivando respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

✓ Reemplazando en la EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow g = K(v)$$

Así,  $f = f(x, y) = g(u, v) = K(v)$

$f(x, y) = K(x+y) \rightarrow$  función derivada

10/11/2025

**Observación:** El mismo principio de regla de la cadena es utilizado en derivadas de orden superior.

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

La derivada (parcial) de 1º orden, se denota y define por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

cuando la derivada existe, es también un campo escalar:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Para este "nuevo" campo escalar, se pueden hallar sus derivadas parciales:

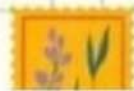
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{h}$$

a esta "nueva" derivada, se la llama Derivada de 2º orden y se denota:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = D_{ji} f(x)$$

si  $i \neq j$ : se denomina **Derivada mixta**

$$\text{si } i = j: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$



Derivadas de orden superior se definen de manera similar

**Observación:** si  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  son continuas, se dice que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ :  $f \in \mathcal{C}^2$

**Teorema:** si  $f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$

**ejemplo:** Hallar las derivadas de 1º orden, las de 2º orden y

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

♥ Derivadas de 1º orden:

• si  $(x, y) \neq (0, 0)$ :  $f(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

• si  $(x, y) = (0, 0)$ :  $f(0, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) + h(1, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) + h(0, 1) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - 0}{h} = 0$$

♥ Derivadas de 2º orden:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

• si  $(x, y) \neq (0, 0)$ :  $\star \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right)$

$$\star \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\star \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\star \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$\Rightarrow f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  en todo punto distinto del origen.

• si  $(x, y) = (0, 0)$ :  $\star \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + h(1, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h}$

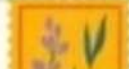
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - 0}{h} = -1$$

$$\star \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + h(1, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - 0}{h} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

La 2º derivada no es continua en el origen, es decir,  $f$  no es de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $(0, 0)$ .



**Observación:** con las derivadas de segundo orden se puede armar una matriz llamada **Matriz Hessiana**, cuyas componentes son las derivadas de 2º orden.

$$Hf(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right) \rightarrow \text{si } f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow Hf(x) = Hf(x)^T \rightarrow \text{es simétrica}$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} (x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} (x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} (x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} (x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} (x) \end{pmatrix}$$

**ejemplo:**  $f(x, y, z) = x^3 y^2 z^4 - x^2 y^4 z^3$

↳ sirve para encontrar aproximaciones de 2º orden

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 z^4 - 2x y^4 z^3 \\ 2x^3 y z^4 - 4x^2 y^3 z^3 \\ 4x^3 y^2 z^3 - 3x^2 y^4 z^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 6x y^2 z^4 - 2y^4 z^3 & 6x^2 y z^4 - 8x y^3 z^3 & 12x^3 y^2 z^3 - 6x y^4 z^2 \\ 6x^2 y z^4 - 8x y^3 z^3 & 2x^3 z^4 - 12x^2 y^2 z^3 & 8x^3 y z^3 - 12x^2 y^3 z^2 \\ 12x^3 y^2 z^3 - 6x y^4 z^2 & 8x^3 y z^3 - 12x^2 y^3 z^2 & 12x^3 y^2 z^2 - 6x^2 y^4 z \end{pmatrix}$$

**ejemplo:** Encontrar la ecuación de Laplace en coordenadas polares.  
 ec. Laplace para una función en coordenadas cartesianas

$$\text{Sea } f = f(x, y): \text{ ec. Laplace: } \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\text{Cambio a coordenadas polares: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

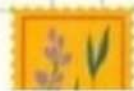
$$f = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r, \theta) = g$$

Hallamos las derivadas:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

\* Derivadas de 1º orden:

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$



★ Derivada de 2º orden:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]$$



11/11/2025

## Derivación implícita

Bajo ciertas condiciones, una ecuación que depende de 2 o más variables puede definir a una de ellas en función de las demás variables. Si la ecuación se la puede resolver respecto a esa variable, se dice que define de manera explícita.

**Ejemplo:**  $x^2y - yz + xy z - z = 0 \Rightarrow z = \frac{z - x^2y}{xy - 1}$   
 $G(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = f(x, y) \rightarrow$  la ec.  $G(x, y, z) = 0$  define explícitamente a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ .

Cuando no es posible resolver respecto a la variable en análisis, se dice que está definida de manera implícita.

$G(x, y, z) = 0$  define a  $z$  implícitamente como función de  $x$  y  $y$ , si existe una función  $z = f(x, y)$  tal que  $G(x, y, f(x, y)) = 0$  usualmente se sabe que existe, pero no se la conoce.

**Ejemplo:**  $x^2y z - y e^z + x = 3 \Rightarrow$  define a  $z$  implícitamente:  $z = f(x, y)$   
 $\Leftrightarrow x^2y f(x, y) - y e^{f(x, y)} + x = 3$

Utilizando la regla de la cadena se pueden determinar las derivadas de la función implícita, sin necesidad de conocerla.

Sea  $z = f(x, y)$  función definida implícitamente por  $G(x, y, z) = 0 \Rightarrow G(x, y, f(x, y)) = 0$   
 Derivada respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} [G(x, y, f(x, y))] = 0$$

$$D_1 G \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + D_2 G \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + D_3 G \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$\hookrightarrow x$  y  $y$  son variables independientes

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{D_1 G}{D_3 G}$$

Para la parte operativa, se debe derivar directamente la ecuación, sin olvidar que  $z$  depende de  $x$  y  $y$ .

De manera similar, se puede definir 2 ecuaciones que definan implícitamente a 2 variables en términos de las demás variables.

$$\begin{cases} G(x, y, u, v) = 0 \\ F(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

**ejemplo:**  $x^2yz - ye^z + x - 3 = 0$   
 Define implícitamente a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ :  $z = f(x, y)$

♥ Hallemos las derivadas de  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{D_1 G}{D_3 G} = - \frac{2xyz + 1}{x^2y - ye^z}$$

• Derivando directamente, sin olvidar que  $z$  depende de  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} [x^2yz - ye^z + x - 3] = 0$$

$$y [2xz + x^2 \frac{\partial z}{\partial x}] - ye^z \frac{\partial z}{\partial x} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{1 + 2xyz}{yx^2 - ye^z}$$

**ejemplo:** Deber 6: ejercicio 5

$F(u, v) = 0$ ;  $u = xy$ ;  $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ : definen una superficie en  $xyz$

♥  $F = F(u, v) = G(x, y, z) = G = 0 \rightarrow$  superficie

$\hookrightarrow$  Tenemos que  $\nabla G$ : normal a  $S$

Hallar la ecuación del plano tangente en  $(1, 1, \sqrt{3})$

♥ Gradiente de  $G$ :

$$\star \frac{\partial G}{\partial x} = D_1 F \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + D_2 F \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y D_1 F + \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} D_2 F \rightarrow \text{evaluada en } (u(x, y, z), v(x, y, z))$$

• Evaluando en  $X_0 = (1, 1, \sqrt{3}) \Rightarrow u_0 = 1, v_0 = 2$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(X_0) = 1 \cdot D_1 F(1, 2) + \frac{1}{2} D_2 F(1, 2)$$

$$= 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \rightarrow \text{Datos del problema}$$

$$\star \frac{\partial G}{\partial y} = D_1 F \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + D_2 F \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

♥ Plano tangente:  $N \cdot (x - x_0) = 0$



## ejemplo:

10. Sea  $f$  una función homogénea de grado  $\alpha$ . Muestre que

$$\alpha(\alpha-1)f(x,y) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Solución:  $f$  es homogénea de grado  $\alpha \Leftrightarrow f(tx) = t^\alpha f(x)$

✓ si se toma  $x$  fijo: lo anterior es función de  $t$

✱ sea  $g(t) = f(tx) = t^\alpha f(x)$

✓ Derivando respecto a  $t$ :

✱  $g'(t) = D_1 f \frac{\partial(tx)}{\partial t} + D_2 f \frac{\partial(ty)}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$

evaluadas  
en  $tx$

$$\Rightarrow g'(t) = x D_1 f + y D_2 f = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

✓ Derivando nuevamente respecto a  $t$

✱  $g''(t) = x \frac{d}{dt} (D_1 f) + y \frac{d}{dt} (D_2 f) = \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} f(x)$

$$= x [D_1(D_1 f) \frac{\partial(tx)}{\partial t} + D_2(D_1 f) \frac{\partial(ty)}{\partial t}] + y [D_2(D_1 f) \frac{\partial(tx)}{\partial t} + D_2(D_2 f) \frac{\partial(ty)}{\partial t}]$$

$$= x^2 D_{1,1} f + xy D_{1,2} f + xy D_{2,1} f + y^2 D_{2,2} f = \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} f(x)$$

evaluadas en  $tx$

✱ En  $t=1$ :  $x^2 D_{1,1} f(x) + 2xy D_{1,2} f(x) + y^2 D_{2,2} f(x) = \alpha(\alpha-1) f(x)$

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1) f(x)$$

## ejemplo:

16. Encuentre dos funciones reales:  $g, h$  que verifiquen las condiciones  $g(0)=h(0)=1$ ,  $g'(0)=h'(0)=0$ ,  $g''(0)=1$  y tales que la función definida por  $f(x,y) = g(x)h(y)$  sea solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

✓  $\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x)h(y) = g'h$

✓  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''h$

✓  $\frac{\partial f}{\partial y} = gh'$

✓  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = gh''$

✱ Reemplazando en la EDP:

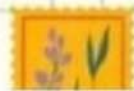
$$g''h + gh'' = 0$$

$$g''h = -gh''$$

depende de  $x \leftarrow \left( \frac{g''}{g} = -\frac{h''}{h} \right) \rightarrow$  depende de  $y$

$\Leftrightarrow$  constante =  $K$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'' - Kg = 0 \\ h'' + Kh = 0 \end{cases} \rightarrow \text{EOD's de 2º orden}$$



$$i) \text{ Si } \kappa > 0: \kappa = \lambda^2 \quad \begin{cases} g'' - \lambda^2 g = 0 & (1) \\ h'' + \lambda^2 h = 0 & (2) \end{cases}$$

• Soluciones: (1):  $g(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$   
 (2):  $h(y) = c_3 \cos(\lambda y) + c_4 \sin(\lambda y)$

Así,

$$\star g'(x) = \lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x}$$

$$\star g''(x) = \lambda^2 c_1 e^{\lambda x} + \lambda^2 c_2 e^{-\lambda x}$$

$$\star h'(y) = -\lambda c_3 \sin(\lambda y) + \lambda c_4 \cos(\lambda y)$$

• Condiciones:

$$\star g(0) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \cosh x$$

$$\star g'(0) = 0 \Rightarrow 0 = \lambda c_1 - \lambda c_2$$

$$\star g''(0) = 1 \Rightarrow 1 = \lambda^2 c_1 + \lambda^2 c_2 \quad \lambda = 1$$

$$\star h(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 0 \Rightarrow c_3 = 1 \Rightarrow h(y) = \cos y$$

$$\star h'(0) = 0 \Rightarrow 0 = -\lambda c_3 \cdot 0 + \lambda c_4 \cdot 1 \quad c_4 = 0$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \cosh x \cdot \cos y$$

$$ii) \kappa < 0: \kappa = -\lambda^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_1 = c_2 = 0; \quad c_3 = c_4 = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$iii) \kappa = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{idem}$$

## Uso de la matriz Hessiana

### Polinomio de Taylor de orden 2

Sea  $f = f(x) \in \mathcal{C}^2$ , el desarrollo de Taylor de orden 2 alrededor de  $x_0$  es:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T Hf(x_0) \cdot (x - x_0) + \overbrace{\|x - x_0\|^2 E_2(x, x_0)}^{\text{Error}}$$

con  $\lim_{x \rightarrow x_0} E_2(x, x_0) = 0$

Para  $x$  "cercano" a  $x_0$ , se puede "despreciar" el error, obteniéndose una función cuadrática de  $f$ .

$$f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T Hf(x_0) (x - x_0)$$



## ejemplo:

34. Calcular el polinomio de Taylor de grado dos centrado en el origen de coordenadas de la función  $z(x, y)$  definida implícitamente mediante la ecuación  $z^3 + x^2 + (y^2 + 1)z = 0$

♥ Hallemos las derivadas de 1º orden con derivación implícita

✧ Derivada respecto a  $x$ :

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2x + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

✧ Derivada respecto a  $y$ :

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

♥ En  $X_0 = (0, 0) \Rightarrow z^3 + z = 0 \Rightarrow z = 0 \vee z = \pm i$

✧ Si tomamos  $z = 0$ :  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

♥ Hallamos las derivadas de 2º orden:

✧ En (1): • derivada respecto a  $x$ :  $(6z \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

• derivada respecto a  $y$ :  $(6z \frac{\partial z}{\partial y}) \frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 2yz \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$

✧ En (2): • derivada respecto a  $x$ :

• derivada respecto a  $y$ :

♥ En  $X_0 = (0, 0)$ :

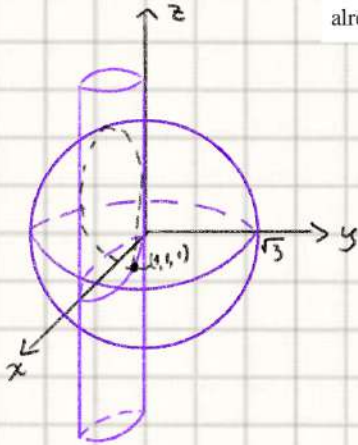


18/11/2025

ejemplo:

Deber 6

36. Sea  $C$  la curva dada por la intersección de la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  con el cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = 2x$ . Comprobar que en un entorno del punto  $P = (1, 1, 1)$  se pueden despejar las variables  $x = x(z)$  e  $y = y(z)$  de la curva como funciones de  $z$  y calcular los polinomios de Taylor de orden dos de las correspondientes funciones  $x = x(z)$  e  $y = y(z)$  alrededor del punto  $z_0 = 1$



$P(1, 1, 1) \in$  esfera  
 $\in$  cilindro }  $\in$  curva

Curva: representación paramétrica

Parámetro:  $z$ 

de (1) y (2):

$$(1) \text{ en (1): } 2x + z^2 = 3$$

$$x = \frac{1}{2}(3 - z^2)$$

$$\text{en (2): } y^2 = (2x - x^2) = (3 - z^2) - \frac{1}{4}(3 - z^2)^2$$

$$\Rightarrow x = x(z)$$

$$y = y(z)$$

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Parametrización: } C: \begin{cases} x = \frac{1}{2}(3 - z^2) \\ y = (3 - z^2 - \frac{1}{4}(3 - z^2)^2)^{1/2} \\ z = z \end{cases}$$

$x = x(z)$ : desarrollo de Taylor orden 2 alrededor de  $z_0 = 1$

$f = f(x)$ : Taylor orden 2 alrededor de  $x = x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0)^2 + \text{Error}$$

$$x(z) \approx x(z_0) + x'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} x''(z_0)(z - z_0)^2$$

⋮



## ejemplo:

22. Las ecuaciones  $f(x, y, z) = 0$ ,  $z = z(x, y)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $x = x(u, v)$  determinan a  $v$  como función de  $u$ , sea  $v = g(u)$ , encuentre  $g'(u)$ .

$$g(u) = v \begin{cases} f(x, y, z) = 0 & (1) \\ z = z(x, y) & (2) \\ y = y(u, v) & (3) \\ x = x(u, v) & (4) \end{cases}$$

si (2) en (1):  $f(x, y, z(x, y)) = F(x, y) = 0$  (5)

(3) y (4) en (5):  $F(x(u, v), y(u, v)) = G(u, v) = 0 \Rightarrow v = g(u)$

♥ Derivada de  $f(x, y, z) = 0$  respecto a  $u$ :

$$\frac{d}{du} f(x, y, z) = 0$$

☆ Regla de la cadena:  $D_1 f \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial u} + D_3 f \frac{\partial z}{\partial u} = 0$

- $\frac{\partial x}{\partial u} = D_1 x \frac{\partial u}{\partial u} + D_2 x \frac{\partial v}{\partial u} = D_1 x + D_2 x \frac{\partial v}{\partial u}$

- $\frac{\partial y}{\partial u} = D_1 y \frac{\partial u}{\partial u} + D_2 y \frac{\partial v}{\partial u} = D_1 y + D_2 y \frac{\partial v}{\partial u}$

- $\frac{\partial z}{\partial u} = D_1 z \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 z \frac{\partial y}{\partial u} = D_1 z (D_1 x + D_2 x \frac{\partial v}{\partial u}) + D_2 z (D_1 y + D_2 y \frac{\partial v}{\partial u})$

\* Reemplazar y despejar :

## ejemplo:

42. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones de una variable real y definamos  $F(x, y) = f[x + g(y)]$ .

Comprobar la relación:  $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

♥  $F(x, y) = f[x + g(y)]$ ; sea  $t = x + g(y) \Rightarrow F(x, y) = f(t)$

• Derivando respecto a  $x$ :

(1)  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = f' \cdot 1 = f'$  evaluada en  $t = x + g(y)$

• Derivando respecto a  $y$ :

(2)  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{df}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = f' \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dg}{dy} = f' g'$

• Derivando (1) respecto a  $x$ :

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (f') = \frac{df'}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = f''$

• Derivando (1) respecto a  $y$ :

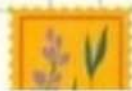
$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (f') = \frac{df'}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = f'' g'$

☆  $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f' f'' g'$

☆  $\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f' g' \cdot f''$

↳ son iguales ■

si no se dice lo contrario, se asume que las derivadas mixtas son iguales



## ejemplo:

39. Las dos ecuaciones:  $F(x, y, u, v) = 0$ ,  $G(x, y, u, v) = 0$  determinan a  $x$  e  $y$  como funciones implícitas de  $u$  y  $v$ . Determine las derivadas parciales de  $x$  e  $y$ . Bajo qué condiciones existen estas derivadas parciales?

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

♥ Derivando respecto a  $u$  ( $x$  y  $y$  dependen de  $u$ )

$$\bullet D_1 F \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 F \frac{\partial y}{\partial u} + D_3 F \frac{\partial u}{\partial u} + D_4 F \frac{\partial v}{\partial u} = 0$$

$$\bullet D_1 G \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 G \frac{\partial y}{\partial u} + D_3 G \frac{\partial u}{\partial u} + D_4 G \frac{\partial v}{\partial u} = 0$$

Entonces tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} D_1 G \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 G \frac{\partial y}{\partial u} = -D_3 G \\ D_1 F \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 F \frac{\partial y}{\partial u} = -D_3 F \end{cases}$$

♥ Resolviendo con Cramer:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} -D_3 G & D_2 G \\ -D_3 F & D_2 F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_1 G & D_2 G \\ D_1 F & D_2 F \end{vmatrix}}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \text{idem}$$

# Derivación DE Funciones Vectoriales

$$\text{Si } F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

es una función vectorial, donde cada componente  $f_i$  es un campo escalar derivable, entonces  $F$  es derivable, su derivada queda expresada en forma matricial:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad \begin{matrix} \text{Matriz} \\ \text{Jacobiana} \end{matrix}$$

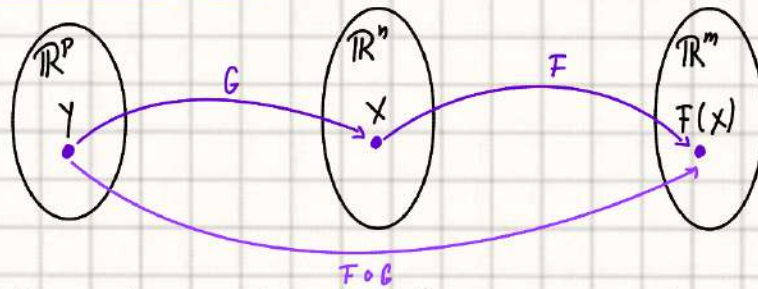
## ejemplo:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y^3 \\ \text{sen}(xy) \\ e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

$$DF = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2 y^2 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ 2x e^{x^2 - y^2} & -2y e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

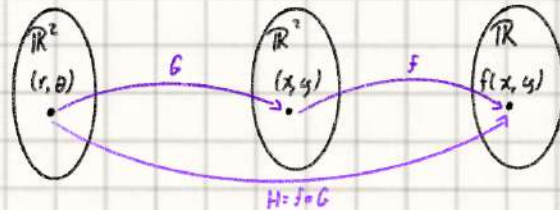


## Regla de la cadena



Sea  $F$  diferenciable en  $X_0$ ,  $G$  diferenciable en  $Y_0$  con  $X_0 = G(Y_0)$   
 Entonces, la función compuesta:  $F \circ G$  es diferenciable en  $Y_0$   
 Además  $[D(F \circ G)](Y_0) = [DF(X_0)][DG(Y_0)]$

**ejemplo:** Cambio a coordenadas polares



$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \mapsto G(r, \theta) = \begin{pmatrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \mapsto H(r, \theta) = f(G(r, \theta)) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$[DH] = [Df] [DG]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial r} & \frac{\partial H}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \quad \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (r \cos \theta) \right]$$

Observación: la regla de la cadena vista anteriormente es cuando se toma la  $i$ -ésima fila de esta matriz.

## Operador Nabla: $\nabla$

Se lo define como un "vector" de la forma  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  se lo puede aplicar a funciones escalares o vectoriales (definidos en  $\mathbb{R}^3$ )

Campo escalar:  $f = f(x, y, z): \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \text{Grad } f$

Campo vectorial:  $F = F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

se puede aplicar el operador Nabla como un producto vectorial o como un campo escalar

♥ "Producto Vectorial":  $\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

$$\Rightarrow \nabla \times F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \text{Rot } F$$

El rotacional se utiliza en teoría de fluidos, para determinar si un fluido tiene o no rotaciones. Si  $F$  representa el fluido y  $\nabla \times F = 0$ , el fluido se dice irrotacional.

**Teorema:** Sea  $f$  un campo escalar diferenciable, entonces  
 $\nabla \times (\nabla f) = 0$        $\nabla \times F = 0 \Leftrightarrow F = \nabla f$

**Observación:** los campos vectoriales que son un gradiente:  $\nabla f = F$ , entonces  $\nabla \times F = 0$ , es irrotacional.

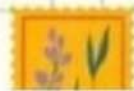
El recíproco también es cierto, es decir, si  $F$  es irrotacional, entonces  $F$  proviene de un gradiente.

♥ "Producto escalar":  $\nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R)$   
 $= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{Div } F \rightarrow \text{divergencia}$

Se lo utiliza en gases. Cuando  $\text{Div } F = 0$ , el campo se dice incompresible.

**Teorema:** Para todo campo vectorial  $F \in \mathcal{C}^2$  se tiene que  
 $\text{Div}(\text{Rot } F) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

**Observación:** cuando un campo vectorial es un campo gradiente, para hallar el potencial  $f$ , se integra cada componente respecto a su correspondiente variable y se suman los resultados "eliminando" los términos que se repiten.





19/11/2025

Deber 7

**ejemplo:**

7. Muestre que las partes real e imaginaria de las siguientes funciones complejas, forman las componentes de un campo vectorial en el plano, irrotacional e incompresible.

- a)  $(x-iy)^2$
- b)  $(x-iy)^3$
- c)  $e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

$$a) (x-iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2$$

$$= (x^2 - y^2) + i(-2xy)$$

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy) : \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, -2xy, 0)$$

$$\checkmark \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & -2xy & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(-2y+2y) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\checkmark \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x^2 - y^2, -2xy, 0) = 2x - 2x + 0 = 0$$

Así,  $F$  es irrotacional e incompresible

$$c) e^{x-iy} = e^x \cdot e^{-iy}$$

$$= e^x (\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y))$$

$$= e^x (\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

$$= e^x \cos y + i(-e^x \operatorname{sen} y) : \text{Resto del procedimiento igual al anterior}$$

**ejemplo:**

8. Mostrar que  $F = y(\cos x)i + x(\operatorname{sen} y)j$ , no es un campo vectorial gradiente.

$$F = (y \cos x, x \operatorname{sen} y, 0)$$

$$\checkmark \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y \cos x & x \operatorname{sen} y & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(\operatorname{sen} y - \cos x) = (0, 0, \operatorname{sen} y - \cos x) \neq 0$$

Operador de Laplace:  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   
 $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$



# ejemplo:

10. Sea  $F(x, y, z) = (2xz^2, 1, xy^3z)$ ,  $G(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$  y  $f(x, y, z) = x^2y$ . Calcular las siguientes cantidades

- $\nabla f$
- $\nabla_x F$
- $(F \cdot \nabla)G$
- $F \cdot (\nabla f)$
- $F \times \nabla f$

$$\begin{aligned} \text{a) } \nabla f &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= (2xy, x^2, 0) \end{aligned}$$

$$\text{b.1) } F \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2xz^2 & 1 & xy^3z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (z^2 - xy^3z, x^3y^3z - 2xz^4, 2xy^2z^2 - x^3)$$

$$\text{b.2) } \nabla_x F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & 1 & xy^3z \end{vmatrix} = (3xy^3z, 4xz - y^3z, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (F \cdot \nabla)G &= (F \cdot \nabla G_1, F \cdot \nabla G_2, F \cdot \nabla G_3) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 2xz^2 \\ 1 \\ xy^3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2xz^2 \\ 1 \\ xy^3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2xz^2 \\ 1 \\ xy^3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \right) \\ &= (4x^2z^2, 2y, 2xy^3z^2) \end{aligned}$$

$$\text{d) } F \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} 2xz^2 \\ 1 \\ xy^3z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4x^2yz^2 + x^2$$

$$\text{e) } F \times \nabla f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2xz^2 & 1 & xy^3z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = (-x^3y^3z, 2x^2y^4z, 2x^3z^2 - 2xy)$$

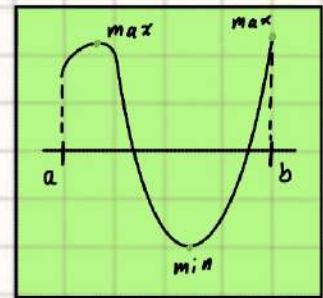
25/11/2025

# Optimización

## Campos Escalares

Se refiere a encontrar los puntos en los que un campo escalar alcanza valores extremos (máximo o mínimo). Estos puntos extremos pueden ser locales o absolutos.

**Definición (extremo local o relativo):** Sea  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$   
 se dice que  $f$  alcanza un máximo o mínimo relativo (o local) en  $x_0 \in U$  si  $f(x) \geq f(x_0)$  (mínimo) o  $f(x) \leq f(x_0)$  (máximo) para  $x$  en una vecindad de  $x_0$ .



**Observación:** la definición anterior se puede poner en forma equivalente:

$x_0$  punto donde  $f$  alcanza:

✓ mínimo relativo  $\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$

✓ máximo relativo  $\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

es decir, para determinar si en  $x_0$  se alcanza un extremo, es suficiente analizar el signo de  $[f(x) - f(x_0)]$ .

**Teorema** - Sea  $f \in \mathcal{C}^1$ , si  $x_0$  es punto extremo, entonces  
$$\nabla f(x_0) = 0$$

**Observación:** el recíproco del teorema anterior no necesariamente es cierto. Es decir, los puntos  $x_0$  tales que  $\nabla f(x_0) = 0$  pueden ser puntos extremos.

Para encontrar los puntos extremos, es de ayuda el desarrollo de Taylor.

**Orden 1:**  $f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

**Orden 2:**  $f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T Hf(x_0) (x - x_0)$

si  $x_0$  es punto crítico:  $\nabla f(x_0) = 0$

**Orden 1:**  $f(x) - f(x_0) \approx 0$ : no da información sobre el signo de  $[f(x) - f(x_0)]$

**Orden 2:**  $f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{2} (x - x_0)^T Hf(x_0) (x - x_0)$

de donde, el signo de  $[f(x) - f(x_0)]$  es el mismo

de la forma cuadrática  $(x - x_0)^T Hf(x_0) (x - x_0)$ . Sea  $Y = (x - x_0) \Rightarrow Y^T Hf(x_0) Y$

**Observación:** los puntos  $x_0$  donde  $\nabla f(x_0) = 0$ ,  $x_0$  se denomina punto crítico y necesariamente debe ser un punto interior.

**Definición:** Dada una forma cuadrática  $Y^T A Y$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$ , se dice que  $A$  es definida positiva si y solo si  $Y^T A Y > 0$ .

**Observación:** Para averiguar el signo de  $Y^T Hf(x_0) Y$  es suficiente analizar  $Hf(x_0)$ . Si esta es definida positiva, entonces  $f$  alcanza un mínimo en  $x_0$ .

Para saber si una matriz es definida positiva, es de utilidad lo siguiente:

**Teorema:** Sea  $A$  una matriz simétrica,  $A$  es definida positiva si y solo si todos sus valores propios son positivos, y es definida negativa si y solo si todos sus valores propios son negativos.

**Teorema:** Sea  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $x_0$  punto interior de  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si  $x_0$  es punto crítico ( $\nabla f(x_0) = 0$ ), entonces:

- ① Si todos los valores propios de  $Hf(x_0)$  son positivos, entonces la función alcanza su mínimo en  $x_0$ .
- ② Si todos los valores propios de  $Hf(x_0)$  son negativos, entonces la función alcanza su máximo en  $x_0$ .
- ③ Si existen valores propios positivos y negativos, entonces  $x_0$  es punto de ensilladura.
- ④ Si existen valores propios nulos, el criterio no es concluyente.



**Observación:** Para el caso particular  $n=3$ :  
 $f=f(x,y,z)$ . A partir del teorema anterior,  
 se puede deducir lo siguiente:

**Corolario:** Sea  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $X_0$  un punto crítico  
 $Hf(X_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ ;  $\Delta = \det(Hf(X_0)) = AC - B^2$

Entonces:

- 1- Si  $\Delta > 0$ ;  $A > 0 \Rightarrow X_0$  es mínimo
- 2- Si  $\Delta > 0$ ;  $A < 0 \Rightarrow X_0$  es máximo
- 3- Si  $\Delta < 0 \Rightarrow X_0$  es silla
- 4- Si  $\Delta = 0 \Rightarrow$  el criterio no es concluyente

**ejemplo:**  $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$

✓  $\nabla f = (4x^3 - 4yz; 4y^3 - 4xz; 4z^3 - 4xy)$

✓ Igualando a 0:  $\nabla f(X_0) = (0, 0, 0) \Rightarrow (4x_0^3 - 4y_0z_0; 4y_0^3 - 4x_0z_0; 4z_0^3 - 4x_0y_0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 4x_0^3 - 4y_0z_0 = 0 \\ 4y_0^3 - 4x_0z_0 = 0 \\ 4z_0^3 - 4x_0y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^3 - y_0z_0 = 0 \\ y_0^3 - x_0z_0 = 0 \\ z_0^3 - x_0y_0 = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos son aquellos que cumplen con el sistema anterior.

Ej:  $(0, 0, 0)$ ;  $(1, 1, 1)$ ; etc

✓ Hay que analizar la naturaleza de estos puntos con la matriz Hessiana.

$$Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{pmatrix}$$

✓ Si consideramos  $X_0 = (1, 1, 1)$

$$Hf = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

✓ Valores propios:  $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 12 - \lambda & -4 & -4 \\ -4 & 12 - \lambda & -4 \\ -4 & -4 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(12 - \lambda)^3 - 16(12 - \lambda) - 64 - 16(12 - \lambda) - 64 - 16(12 - \lambda) = 0$$

$$(12 - \lambda)^3 - 48(12 - \lambda) - 128 = 0$$

$$(144 - 24\lambda + \lambda^2)(12 - \lambda) - 48(12 - \lambda) - 128 = 0$$

$$1728 - 288\lambda + 12\lambda^2 - 144\lambda + 24\lambda^2 - \lambda^3 - 576 + 48\lambda - 128 = 0$$

$$1024 - 384\lambda + 36\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 16 \\ \lambda_3 = 16 \end{cases}$$



**ejemplo:**  $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$  con  $A > 0$ ;  $B^2 < AC$

✓ Puntos críticos:  $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2Ax + 2By + 2D = 0 \\ 2Bx + 2Cy + 2E = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax + By = -D \\ Bx + Cy = -E \end{cases}$$

• Resolviendo con Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{-CD + BE}{AC - B^2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{-AE + BD}{AC - B^2}$$

✓ Punto crítico (Único):

$$X_0 = \left( \frac{-CD + BE}{AC - B^2}; \frac{-AE + BD}{AC - B^2} \right)$$

✓ Naturaleza del punto crítico:

• Matriz Hessiana:  $Hf = \begin{pmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{pmatrix}$

• determinante:  $\Delta = \det(Hf) = 4(AC - B^2) > 0 \rightarrow$  por condición del problema

• Además:  $2A > 0 \Rightarrow$  mínimo

✓ Evaluando  $f$  en  $X_0 = \left( \frac{-CD + BE}{AC - B^2}; \frac{-AE + BD}{AC - B^2} \right)$

$$\text{se tiene: } \begin{cases} Ax_0 + By_0 = -D \\ Bx_0 + Cy_0 = -E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax_0^2 + Bx_0y_0 = -Dx_0 \\ Bx_0y_0 + Cy_0^2 = -Ey_0 \end{cases}$$

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = -Dx_0 - Ey_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x_0, y_0) &= Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F \\ &= -Dx_0 - Ey_0 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F \\ &= Dx_0 + Ey_0 + F \end{aligned}$$

26/11/2025

**Teorema (Weierstrass)** - Si  $f \in \mathcal{C}^0$  (continua) y su derivada es compacto (cerrado y acotado). Entonces,  $f$  tiene un máximo y un mínimo absoluto.

Este teorema solo determina existencia, mas no los halla. Para determinar los extremos absolutos, se requiere que  $f$  sea de clase  $\mathcal{C}^1$ . Entonces, los puntos candidatos a ser extremos son los puntos críticos o los de la frontera.

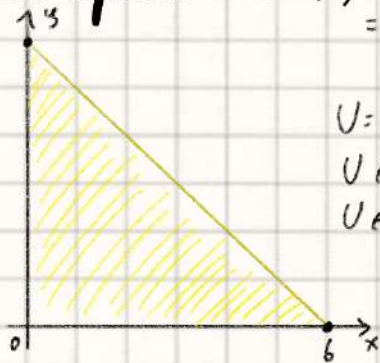
Se evalúa la función en estos puntos y el menor valor corresponde al mínimo y el mayor corresponde al máximo



**ejemplo:**

$$f(x, y) = x^2 y (4 - x - y) \\ = 4x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$$

**Dominio:** triángulo limitado por:  
 $x=0, y=0, x+y=6$



$$U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq y \leq 6 - x\}$$

U es acotado

U es cerrado

$\Rightarrow$  U es compacto

f es polinomial, por lo que f es continua

$\Rightarrow$  Por Weierstrass, f tiene un máximo y un mínimo absolutos.

• Candidatos: Puntos Críticos y Frontera

• Puntos Críticos:  $\nabla f = (8xy - 3x^2 - 2xy, 4x^2 - x^3 - 2x^2y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 8xy - 3x^2 - 2xy = 0 \\ 4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy(6 - 3x) = 0 \quad (1) \\ x^2(4 - 1 - 2y) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

• De (1):  $x=0 \vee y=0 \vee 8-3x-2y=0$

• De (2):  $x=0 \vee 4-x-2y=0$

\* Resolviendo:  $x=0; y=2$

$y=0; x=0$

$y=0; x=4$

$x=0; y=4$

$x=2; y=1 \rightarrow$  Punto crítico

no son críticos, pues son puntos interiores

• Frontera:  $x=0; 0 \leq y \leq 6 : f(0, y) = 0$

$y=0; 0 \leq x \leq 6 : f(x, 0) = 0$

$y=6-x; 0 \leq x \leq 6 : f(x, y) = x^2(6-x)(4-x-(6-x)) ; 0 \leq x \leq 6$   
 $= x^2(6-x)(-2)$

$h(x) = -12x^2 + 2x^3 ; 0 \leq x \leq 6$

A la función h también aplica Weierstrass. Así,

•  $h'(x) = -24x + 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x(x-4) = 0$

$x=0 \vee x=4$

$\Rightarrow$  Pto. crítico de h(x):  $x=4$  ( $x=0$  no califica como punto crítico, pues  $\hookrightarrow (4, 2)$ : Pto. Front. de f está en la frontera)

$\Rightarrow$  Pto. frontera de h(x):  $x=0, x=6 \in$  Frontera 1 y Frontera 2

• Evaluación de la función:

•  $f(2, 1) = 4$  : máx. absoluto

•  $f(4, 2) = -64$  : mín. absoluto

•  $f(0, 4) = 0$

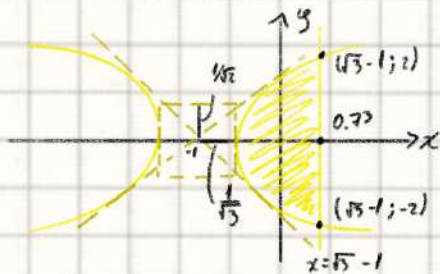
•  $f(x, 0) = 0$

Cuando tenemos un mínimo relativo, este puede ser también un mínimo absoluto

**ejemplo:**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$

**Dominio:** conjunto delimitado por  
 $3x^2 - 2y + 6x = 2 \wedge x = \sqrt{3} - 1$

- $3x^2 - 2y^2 + 6x = -2$   
 $3(x^2 + 2x + 1) - 2y^2 = -2 + 3$   
 $3(x+1)^2 - 2y^2 = 1$   
 $\frac{(x+1)^2}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$
- $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57$  •  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70$
- $\sqrt{3} - 1 \approx 0.73$



- **Dominio:** acotado y cerrado  $\Rightarrow$  compacto }  $f$  tiene un máx y un mín absolutos  
 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$  continua

- **Ptos. Críticos:**  $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{1}{2}; 0)$ : Punto crítico

- **Frontera:**

$T_1$ : segmento de recta:  $x = \sqrt{3} - 1$ ;  $-2 \leq y \leq 2$

$f$  restringida a esta frontera:

$$f(\sqrt{3}-1; y) = (\sqrt{3}-1)^2 + y^2 - (\sqrt{3}-1) = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + y^2 - \sqrt{3} + 1 = 5 - 3\sqrt{3} + y^2$$

$$h(y) = y^2 - 3\sqrt{3} + 5$$

Ptos. frontera en  $T_1$  para  $f$ :  $(\sqrt{3}-1; 0) \wedge (\sqrt{3}-1; \pm 2)$

$T_2$ : porción hipérbola:  $y^2 = \frac{3x^2 + 6x + 2}{2}$ ;  $-1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3} - 1$

$$f(x, y) = x^2 + \frac{3x^2 + 6x + 2}{2} - x$$

$$g(x) = \frac{5x^2 + 4x + 2}{2}; -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3} - 1$$

Ptos. críticos:  $g' = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$  ( $y = \pm \frac{1}{5}$ )

Frontera:  $x = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$  ( $y = 0$ )

Ptos. frontera en  $T_2$  para  $f$ :  $(-\frac{2}{5}, \pm \frac{1}{5}) \wedge (-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$

- **Evaluando la función:**

- $f(\frac{1}{2}; 0) = -\frac{1}{4} = -0.25$ : mín. absoluta
- $f(\sqrt{3}-1, 0) = 5 - 3\sqrt{3} \approx -0.22$
- $f(\sqrt{3}-1, \pm 2) = 9 - 3\sqrt{3} \approx 3.8$ : máx. absoluto
- $f(-\frac{2}{5}, \pm \frac{1}{5}) = \frac{2}{5} = 0.6$
- $f(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; 0) = 0.601$



# extremos condicionados

En algunos casos, es de interés buscar el máximo o el mínimo de una función bajo ciertas restricciones.

**Ejemplo:** hallar el valor máximo o mínimo de la temperatura de los puntos que están sobre una curva.

**Ejemplo:** hallar la distancia mínima de una superficie al origen.

**Ejemplo:** hallar la distancia máxima y mínima entre una curva y una recta.

En general, a la función de la cual se requiere hallar el máximo o el mínimo se le va a llamar **función objetivo**:  $f(X)$  y las restricciones serán  $g_1(X)=0 \dots g_m(X)=0$ . De esta forma, el problema de optimización será

$$(P) \begin{cases} \max_{(\min)} f(x) \\ \text{s.a. } g_1(x)=0 \\ \vdots \\ g_m(x)=0 \end{cases}$$

•  $m \leq n$ : si (P) tiene solución en  $X^*$ , entonces, si existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  tales que

$$\nabla f(X^*) = \lambda_1 \nabla g_1(X^*) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(X^*)$$

**Observación:** para determinar el punto óptimo, se resuelve el sistema algebraico de  $n+m$  ecuaciones, formado por la ecuación del gradiente y las restricciones.

**Observación:** el problema anterior equivale a optimizar la función de Lagrange

$$L(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_m g_m(x)$$

→ Este no es de extremos condicionados

## Recta de mínimos cuadrados

En ciertos problemas, cuando hay 2 variables: una independiente y una dependiente; la relación entre ellas puede tener una tendencia lineal.

**Observaciones:**  $(x_i, y_i); i=1, \dots, n$

**Problema:** Hallar la recta que mejor se ajuste a los puntos:  $y = ax + b$  minimizando el error cuadrático total en el  $i$ -ésimo punto:  $(x_i, y_i)$

✓ Error de la aproximación:  $e_i = |(ax_i + b) - y_i|$

✓ Error cuadrático:  $e_i^2 = [ax_i + b - y_i]^2$

✓ Error cuadrático total:  $E(a, b) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$

Para hallar el valor mínimo:

- Puntos críticos:

$$\nabla E = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \sum 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i \\ \sum 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + n b = \sum y_i \end{cases}$$

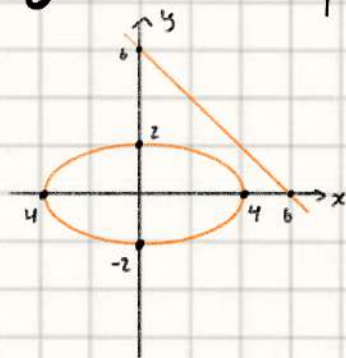
- Resolviendo:  $a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}$$

Punto crítico  $\rightarrow$  con el criterio de la matriz Hessiana, se puede determinar que este punto es un mínimo, y al ser único, es mínimo absoluto  $\cup$

**Observación:** cuando se quiere optimizar una función correspondiente a una raíz cuadrada, es equivalente a optimizar la función sin la raíz.

**ejemplo:** Hallar la distancia mínima <sup>máxima</sup> entre la elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  y la recta  $x + y = 6$



Función a optimizar:  $f = \text{distancia}(P_1, P_2)$   
con  $P_1 \in \text{elipse}$   $\wedge$   $P_2 \in \text{recta}$

•  $P_1 = (x_1, y_1); P_2 = (x_2, y_2)$

Problema de Optimización:

$$\begin{cases} \min_{(max)} f = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \text{s. a. } \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ x_2 + y_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min_{(max)} F = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \text{s. a. } \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} - 1 = 0 \\ x_2 + y_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

• Con los multiplicadores de Lagrange:  $\nabla F = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ ; Variables:  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$

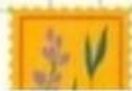
$$\begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{8} x_1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene el sistema algebraico:

$$\begin{cases} 2(x_1 - x_2) = \frac{1}{8} \lambda_1 x_1 \\ -2(x_1 - x_2) = \lambda_2 \\ 2(y_1 - y_2) = \frac{1}{2} \lambda_1 y_1 \\ -2(y_1 - y_2) = \lambda_2 \\ \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ x_2 + y_2 = 6 \end{cases}$$

• Resolviendo:

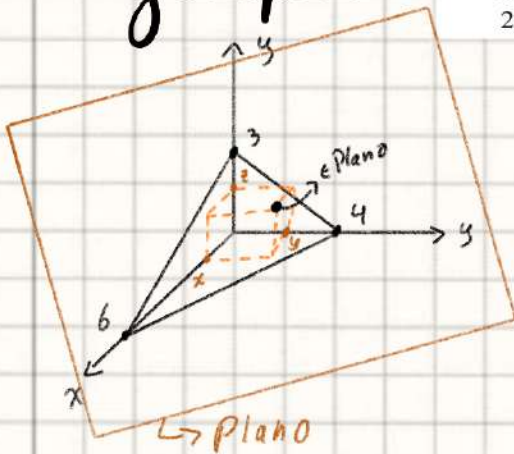
$x_1 = \text{---}$  cada variable va  
 $x_2 = \text{---}$  a tener 2 respues-  
 $y_1 = \text{---}$  tas, de donde se  
 $y_2 = \text{---}$  saca el máx y el  
 $\lambda_1 = \text{---}$  mín  
 $\lambda_2 = \text{---}$



→ Deber 8

**ejemplo:**

19. Encuentre el volumen máximo del paralelepípedo rectangular tal que tres de sus aristas están en las partes positivas de los ejes  $x, y, z$ , respectivamente, y uno de sus vértices esta en el plano  $2x+3y+4z=12$ .



Sea  $P = P(x, y, z)$

✓ Volumen:  $V = xyz$

✓ Problema:  $\max V = xyz$

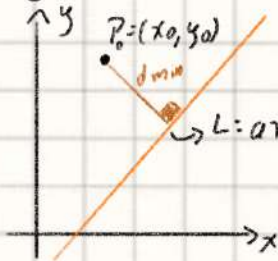
$x, y, z > 0$

✓ Lagrange:  $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz = 2\lambda \\ xz = 3\lambda \\ xy = 4\lambda \\ 2x + 3y + 4z = 12 \end{cases}$$

**ejemplo:**

Encontrar una fórmula para la distancia entre un punto y una recta.



✓ Problema: min distancia de  $P_0$  a  $L$

✓ Restricción:  $(x, y) \in L$

$$\Rightarrow \min d^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

$$\text{s. a. } ax+by+c=0$$

✓ Lagrange:  $\nabla d^2 = \lambda \nabla g$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2(x-x_0) \\ 2(y-y_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-x_0 = \frac{1}{2}\lambda a & x^* = \sim \\ y-y_0 = \frac{1}{2}\lambda b & y^* = \sim \\ ax+by+c=0 & \lambda = \sim \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \sqrt{(x^*-x_0)^2 + (y^*-y_0)^2} = \dots = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

**ejemplo:**

Distancia de  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  al plano:  $ax+by+cz+d=0$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



ejemplo:

→ amb es del deber 8

18. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine la distancia entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$  definidas por:

$$L_1 = \{(x, y, z) / x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 - 2t; t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{(x, y, z) / x = 1 - t, y = 2 - t, z = 3 + t; t \in \mathbb{R}\}$$

$$\checkmark L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✓ función objetivo: distancia de  $P_1$  a  $P_2$

✓ restricciones:  $P_1 \in L_1$  y  $P_2 \in L_2$

Sean  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\checkmark \text{Problema: } \begin{cases} \min d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \\ \text{s. a. } x_1 + y_1 - 5 = 0 \\ \quad \quad \quad z_1 + z_2 - 7 = 0 \\ \quad \quad \quad x_2 - y_2 + 1 = 0 \\ \quad \quad \quad x_2 + z_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

variables:  $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$



# Cálculo Integral

En el cálculo integral vectorial se tienen distintos tipos de integrales, dependiendo del tipo de función a integrar y del dominio de integración. Si el dominio es una curva, se denominan **integrales de línea**, si el dominio es una región plana, se denominan **integrales múltiples** y si el dominio corresponde a una superficie, se denominan **integrales de superficie**.

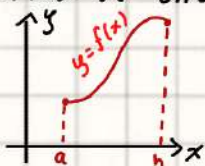
## Integral DE Línea

Se considera una curva:  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  que sea parametrizable, con parametrización:

$$C: \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}; a \leq t \leq b \Leftrightarrow C: \alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \alpha(t)$$

**Observación:** en  $\mathbb{R}^2$ , las curvas más utilizadas son:

1.- Gráfica de una función:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



$$C: \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}; a \leq x \leq b$$

2.- Cónica (en forma canónica):

Elipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow C: \begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = b \sin(\omega t) \end{cases}$

Hipérbola:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow C: \begin{cases} x = a \cosh(\omega t) \\ y = b \sinh(\omega t) \end{cases}$

Parábola:

- Vértice en el origen:  
 $x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p} \mapsto$  caso 1
- Foco en el origen:  
 $x^2 = 4p(y+p)$  idem al anterior

3.- Cónica general (ec. cuadrática)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cónica está rotada y/o trasladada

**Observación:** Para una curva en  $\mathbb{R}^3$ , se puede parametrizar su proyección sobre uno de los planos cartesianos y luego la tercera variable.



## Integral de línea de campos Escalares

Sea  $C$  una curva parametrizable, con parametrización:

$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \alpha(t)$$

La longitud de arco, se denota  $s$  y define por

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt$$

Dado un campo escalar definido en  $C$

$$\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \varphi(X)$$

La integral de línea de  $\varphi$  respecto a la longitud de arco se denota  $\int_C \varphi ds$  y define por:

$$\int_C \varphi(X) ds = \int_a^b \varphi(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

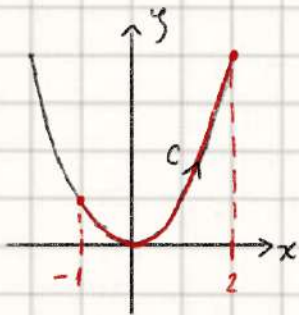
$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|, \text{ pero } s' = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \|\alpha'(t)\| dt$$

**ejemplo:**

$C$ : Porción de parábola  $y = x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 2$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = x^2 - xy + 2y \quad \text{Hallar } \int_C \varphi ds$$



$$\text{Parametrización: } C: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}; -1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \alpha(x) = (x, x^2)$$

$$\heartsuit \alpha'(x) = (1, 2x)$$

$$\heartsuit \|\alpha'(x)\| = \sqrt{1+4x^2} \Rightarrow ds = \|\alpha'(x)\| dx$$

$$\Rightarrow \int_C \varphi ds = \int_C (x^2 - xy + 2y) ds$$

$$= \int_{-1}^2 (x^2 - x(x^2) + 2(x^2)) \sqrt{1+4x^2} dx$$

## Propiedades y Aplicaciones

propiedades

Linealidad:  $\int_C (a\varphi + b\psi) ds = a \int_C \varphi ds + b \int_C \psi ds$

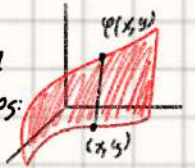
Aditividad:  $C = C_1 \cup C_2$  tal que  $C_1 \cap C_2 = \{\text{punto}\}$   
 $\Rightarrow \int_C \varphi ds = \int_{C_1} \varphi ds + \int_{C_2} \varphi ds$

Cambio de Parametrización: si  $\alpha, \beta$  son 2 parametrizaciones de  $C$ , entonces:  
$$\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^d \varphi(\beta(\tau)) \|\beta'(\tau)\| d\tau$$

aplicaciones

1.- Si  $\varphi = 1 \Rightarrow \int_C \varphi ds = \int_C ds = \text{longitud de curva}$

2.- Si  $C$  es una curva plana y  $\varphi$  es la altura de una valla tal que tiene la forma de  $C$ , entonces el área de la valla es:  
 $A = \int_C \varphi ds$



3.- Sea un alambre que tiene la forma de la curva  $C$  y  $\varphi$  es la densidad, entonces:

• masa:  $m = \int_C \varphi ds$     • Centroides:  $\bar{X} : m\bar{X}_i = \int_C x_i \varphi(x) ds$

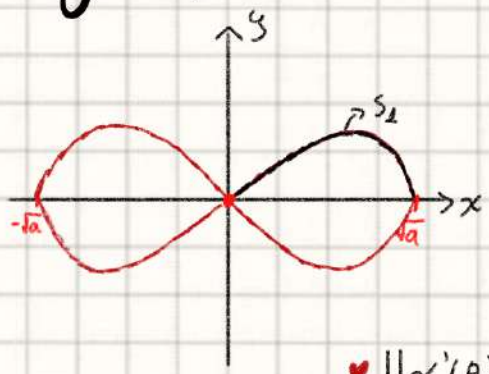
• momento de inercia respecto a un eje  $L$ :  $I_L = \int_C \varphi(x) \delta^2(x) ds$   
donde  $\delta(x)$ : distancia de  $X$  a  $L$ .  $\delta(x) = \frac{\|AX \times V\|}{\|V\|}$ ;  $A \in L$ ,  $V$ : direc. recta

Observación: si  $C$  es una curva cerrada, se suele denotar  $\oint_C \varphi ds$



**ejemplo:**

19. Calcule la longitud de la lemniscata  $r^2 = a \cos 2\theta$ ,  $a > 0$



$L = 4S_1$  ;  $S_1$  : porción de lemniscata en 1º cuadrante.  
 $r = \sqrt{a \cos 2\theta}$  ;  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

♥ Parametrizando:

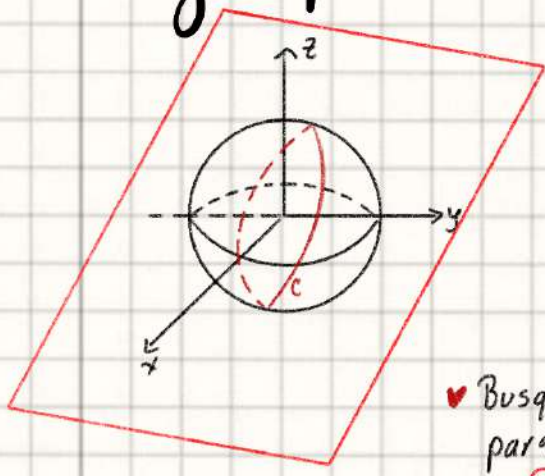
$C: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow C: \begin{cases} x = \sqrt{a} \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta} \\ y = \sqrt{a} \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta} \end{cases}$

♥  $\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}$

♥  $L = 4 \int_{C_1} ds = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta$

**ejemplo:**

23. Encuentre la masa de un alambre cuya forma es de la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano  $x + y + z = 0$  si la densidad del alambre en  $(x, y, z)$  es  $x^2$ .



♥ Parametrización de C:

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

♥ Proyectaremos sobre plano xy ("eliminamos" la variable z)

$\Rightarrow z = -x - y \Rightarrow x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 1$

$x^2 + x^2 + y^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  : ec. cuadrática  $\Rightarrow$  es una cónica esta rotada.

♥ Busquemos la rotación (un nuevo sistema de referencia) para tener en la forma canónica:

Rotación:  $\begin{cases} x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y_1 = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$

♥ Reemplazando:

$(x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 + (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) + (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)^2 = \frac{1}{2}$   
 $x_1^2 \cos^2 \theta - 2x_1 y_1 \cos \theta \sin \theta + y_1^2 \sin^2 \theta + x_1^2 \cos \theta \sin \theta + x_1 y_1 \cos^2 \theta - x_1^2 \sin^2 \theta + 2x_1 y_1 \cos \theta \sin \theta + y_1^2 \cos^2 \theta - 2x_1 y_1 \sin^2 \theta - y_1^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2}$

$x_1^2 + y_1^2 + (x_1^2 - y_1^2) \cos \theta \sin \theta + x_1 y_1 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}$

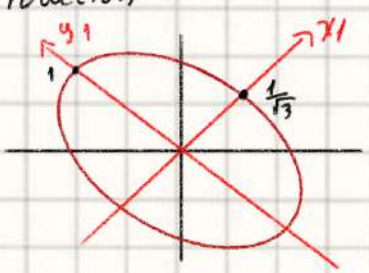
• Sea  $\theta = \frac{\pi}{4}$ : ángulo de rotación

$\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + (x_1^2 - y_1^2) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} y_1^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{(1)^2} = 1$



♥ Parametrizando:  $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \\ y_1 = \sin t \end{cases}$  pero,  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 - y_1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 + y_1) \end{cases}$

⇒  $C_{x,y}: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \end{cases}$

Dado que  $z = -x - y$ , entonces:

$C: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos t \end{cases}$

Así,  $\|\alpha'(t)\| = \dots \Rightarrow ds = \|\alpha'(t)\| dt$

♥ masa:  $m = \int_C \rho ds = \int_C x^2 ds = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right) \right]^2 \|\alpha'(t)\| dt$

09/12/2025

## Integral de línea en campos vectoriales

Sea  $C$  una curva (en  $\mathbb{R}^n$ ) parametrizable, con parámetros:

$$\alpha: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t); \dots; x_n(t))$$

Sea  $F$  un campo vectorial:

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto F(X) = (f_1(X); \dots; f_n(X))$$

La integral de línea de  $F$  sobre la curva  $C$  se denota

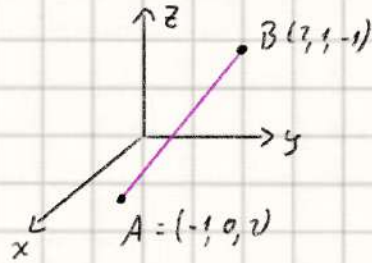
$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_n(x(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_a^b [f_1(x(t)) x_1'(t) + \dots + f_n(x(t)) x_n'(t)] dt \\ &= \int_C f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n \end{aligned}$$



**ejemplo:**  $C$ : segmento de recta que va de  $(-1, 0, 2)$  a  $(2, 1, -1)$   
 $F = F(x, y, z) = (xy, yz, xyz)$

♥  $\int_C F \cdot d\alpha = \int_C xy \, dx + yz \, dy + xyz \, dz$

♥ Parametrizamos  $C$ :



★ Recta:  $X = A + t \vec{V}$  ↗ Punto  
↘ dirección  
 $\vec{V} = \vec{AB}$   
 $= B - A$   
 $= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

⇒  $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

★ Segmento  $\overline{AB}$ :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1$

★ Curva  $C$ :  $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 - 3t \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$

Observación: en general, porción de recta entre  $A, B$ :  
 $X = A + t(B - A)$   
 $0 \leq t \leq 1$

♥ Reemplazando:  $\int_C F \cdot d\alpha = \int_C xy \, dx + yz \, dy + xyz \, dz$

$$= \int_0^1 [(-1+3t)(t)3dt + (t)(2-3t)dt + (-1+3t)(t)(2-3t)(-3dt)]$$

$$= \int_0^1 (-3t + 9t^2 + 2t - 3t^2 - 2t + 9t^2 - 9t^3) dt$$

$$= \int_0^1 (-3t + 15t^2 - 9t^3) dt$$

$$= \left[ -\frac{3}{2}t^2 + 5t^3 - \frac{9}{4}t^4 \right]_0^1$$



## Propiedades y Aplicaciones

**Linealidad:**  $\int_C (aF \pm bG) \cdot d\alpha = a \int_C F \cdot d\alpha \pm b \int_C G \cdot d\alpha$

**Aditividad:**  $C = C_1 \cup C_2 : \int_C F \cdot d\alpha = \int_{C_1} F \cdot d\alpha + \int_{C_2} F \cdot d\alpha$

**Cambio de Parametrización:** Sea  $\alpha, \beta$  dos parametrizaciones de  $C$ . Entonces, si  $\alpha \wedge \beta$  generan la curva en el mismo sentido:

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_C F \cdot d\beta$$

Si  $\alpha \wedge \beta$  generan la curva pero en sentidos contrarios:

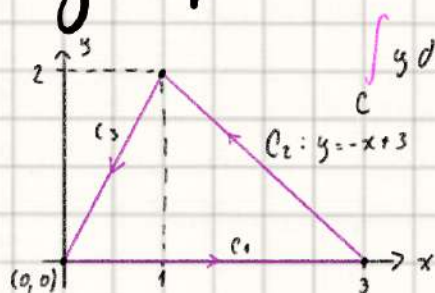
$$\int_C F \cdot d\alpha = - \int_C F \cdot d\beta$$

propiedades

**ejemplo:**

$F(x, y) = (y, x)$

$C$ : contorno del triángulo de vértices  $(0,0), (3,0), (1,2)$  con recorrido en sentido positivo.



$\int_C y dx + x dy = ?$

Sea  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$$\Rightarrow \int_C y dx + x dy = \int_{C_1} y dx + x dy + \int_{C_2} y dx + x dy + \int_{C_3} y dx + x dy$$

Parametrizando:

$C_1: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} ; 0 \leq t \leq 3$

indica que genera la curva en dirección contraria

$C_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t+3 \end{cases} ; 1 \leq t \leq 3$

$C_3: \begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} \int_C y dx + x dy &= \int_{C_1} y dx + x dy + \int_{C_2} y dx + x dy + \int_{C_3} y dx + x dy \\ &= \int_0^3 (0 \cdot 1 + t \cdot 0) dt - \int_1^3 [(-t+3) \cdot 1 + (t) \cdot (-1)] dt - \int_0^1 (2t \cdot 1 + t \cdot 2) dt \\ &= - \int_0^3 (3-2t) dt - \int_1^3 4t dt \\ &= [t^2 - 3t] \Big|_0^3 - [2t^2] \Big|_1^3 \end{aligned}$$

aplicación

1- Si se considera una partícula que se mueve a lo largo de la curva  $C$  bajo la acción de un campo de fuerzas  $F$ , entonces, el trabajo realizado por  $F$  es la integral de línea.

$$\text{Trabajo: } T = \int_C F \cdot d\alpha$$

Si la energía cinética es  $E_c(x) = \frac{1}{2} m v^2(x)$ , entonces

$$\text{Trabajo} = \text{Variación Energía Cinética}$$
$$T = E_c(B) - E_c(A)$$

**ejemplo:** Sea una fuerza  $F(x, y, z) = (2xy, x^2, -1)$  y una hélice  $C$  tq

$$C: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 2t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \checkmark T &= \int_C F \cdot d\alpha = \int_C 2xy dx + x^2 dy - dz \\ &= \int_0^{2\pi} 18 \cos t \sin t (-3 \sin t dt) + 9 \cos^2 t (3 \cos t dt) - 2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-54 \cos t \sin^2 t + 27 \cos^3 t - 2] dt \\ &= [-18 \sin^3 t + 27 \sin t - 9 \sin^2 t - 2t] \Big|_0^{2\pi} \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark T &= \int_C F \cdot d\alpha = \int_C 2xy dx + x^2 dy - dz \\ &= \int_A^B d(x^2 y - z) = (x^2 y - z) \Big|_A^B \end{aligned}$$



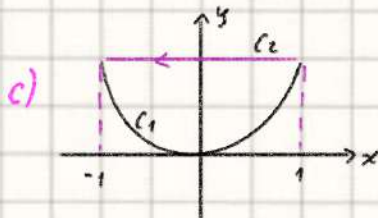
**ejemplo:**  $\int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = ?$

a) C: elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

d) C: curva cualquiera que va de A a B

b) C: exponencial:  $y = e^{-x}$ ;  $0 \leq x \leq 1$

c) C: porción de parábola - porción de recta  $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$ ;  $-1 \leq x \leq 1$



$C = C_1 \cup C_2$

$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}; -1 \leq t \leq 1$

$C_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}; -1 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy &= \int_{C_1} 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy + \int_{C_2} 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy \\ &= \int_{-1}^1 [2t \cdot t^3 + 3t^2 \cdot t^2 \cdot 2t] dt - \int_{-1}^1 [2t \cdot 1 + 3 \cdot t^2 \cdot 1 \cdot 0] dt \\ &= \int_{-1}^1 8t^3 dt - \int_{-1}^1 2t dt \\ &= \int_{-1}^1 [8t^3 - 2t] dt \\ &= [t^8 - t^2]_{-1}^1 = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

d) C: curva genérica que va de A a B

$$\int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = ?$$

Parametrización:  $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} T = \int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy &= \int_a^b [2x(t)y^3(t)x'(t) + 3x^2(t)y^2(t)y'(t)] dt \\ &= \int_a^b (2xy^3x' + 3x^2y^2y') dt \\ &= \int_a^b d(x^2y^3) = (x^2y^3) \Big|_a^b \end{aligned}$$

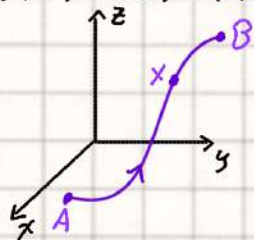
Cuando el valor de la integral de línea no depende de la curva, sino únicamente de los extremos, se dice que es independiente del camino.

Para determinar que campos vectoriales cumplen con esto, se tienen los Teoremas Fundamentales del Cálculo para integrales de línea.

## Independencia del camino

Para algunos campos vectoriales, el valor de una integral de línea, depende únicamente de los extremos de la curva y no de la trayectoria recorrida. En esos casos, se dice que la integral de línea es independiente del camino. Para caracterizar que tipo de campos vectoriales tienen esta propiedad, se usan los Teoremas Fundamentales del Cálculo para integrales de línea. En lo que sigue, se considerará que las funciones son de clase  $C^1$  y están definidas en conjuntos conexos, donde la curva pertenece al conjunto conexo.

**Primer Teorema:** Sea  $F$  un campo vectorial que tiene la propiedad de independencia del camino y, sea  $C$  una curva que va desde  $A$  hasta  $X$ . Entonces, si  $\varphi(x) = \int_A^x F(x) \cdot d\alpha$ , se tiene que  $\nabla\varphi(x) = F(x)$



**Observación:** este resultado indica que si  $F$  tiene la propiedad de independencia del camino, entonces  $F$  es un campo gradiente.

**Segundo Teorema:** sea  $C$  una curva que va de  $A$  a  $X$ , entonces:

$$\int_A^X \nabla\varphi(x) \cdot d\alpha = \varphi(X) - \varphi(A)$$

**Observación:** este último resultado indica que la integral de línea de un campo gradiente es independiente del camino.

De las dos observaciones anteriores, se tiene la equivalencia entre independencia del camino y campo gradiente.

**Teorema:** las 3 afirmaciones siguientes son equivalentes:

- ① La integral de línea de  $F$  es independiente del camino.
- ②  $F$  es un campo gradiente
- ③ La integral de línea sobre toda curva cerrada es nula.

Observación:  $F$  es un campo gradiente si y solo si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j: i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Observación: si  $F$  es un campo gradiente  $\Rightarrow \exists \varphi$  tal que  $F = \nabla \varphi$  donde  $\varphi$  se denomina el potencial de  $F$ .

Para hallar  $\varphi$ , se integra cada componente de  $F$  respecto a su correspondiente variable. Se suman los resultados y se eliminan los que se repiten.

**ejemplo:**  $\int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$

♥  $F = (2xy^3, 3x^2y^2)$

♥ Verificamos si es un campo gradiente:

cond. exactitud  $\left( \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow 6xy^2 = 6xy^2 \right)$

$\Rightarrow F$  es un campo gradiente.

♥ Hallamos el potencial:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int F_1 dx + \int F_2 dy \\ &= \int 2xy^3 dx + \int 3x^2y^2 dy \\ &= x^2y^3 + x^2y^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi = x^2y^3$

♥  $\int_C 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = \int_C (2xy^3) \cdot d\alpha = \int_C \nabla(x^2y^3) \cdot d\alpha = x^2y^3 \Big|_A^B$

a) curva: elipse:  $\oint_C \nabla \varphi \cdot d\alpha = 0$

b) curva:  $c: y = e^{-x}; 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow A = (0, 1) \wedge B = (1, e^{-1})$   
 $\Rightarrow \int_A^B \nabla(x^2y^3) \cdot d\alpha = (x^2y^3) \Big|_A^B = e^{-3} - 0 = e^{-3}$

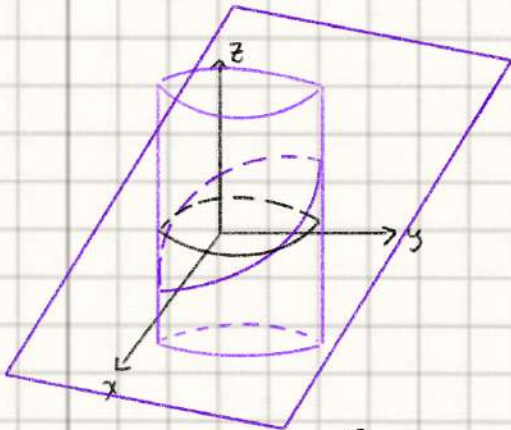
c)  $c: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}; -1 \leq x \leq 1$ : curva cerrada  $\Rightarrow \oint_C \nabla \varphi \cdot d\alpha = 0$

Deber 9

## ejemplo:

11. Sea  $C$  la curva de intersección del cilindro  $4x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $2x + y - z = 0$  y sea  $F(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$

Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$



- ✓ Verificamos si  $F = (z - y; x - z; y - x)$  es un campo gradiente
  - Cond. necesarias y suficientes:  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} : -1 \neq 1 : \text{No es campo gradiente}$

✓ Parametizamos la curva:

## ejemplo:

- $C$ : círculo  $x^2 + y^2 = 1$
- $C$ : segmento de recta que va de  $(1, 1)$  a  $(3, 4)$
- $C$ : porción de parábola  $x = 2y^2$  que va de  $(2, 0)$  a  $(8, 2)$
- $C$ : círculo  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

✓  $F = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

✓ Verificamos si es un campo gradiente

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \bullet \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Así,  $F$  es un campo gradiente.

a)  $C: x^2 + y^2 = 1$

$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= t \Big|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

El teorema no aplica en  $\mathcal{C}$ , pues  $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ ,

es decir, no está definida en el eje  $y$ . Así, el dominio de  $\varphi$  no es conexo, pero la curva está definida en este.

**Observación:** Cuando una partícula se mueve a lo largo de la curva  $C$ , desde  $A$  hasta  $X$ , bajo la acción de un campo de fuerzas  $F$ , se tiene que el trabajo realizado es  $T_A = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$

Además, se tiene que  $T = E_C(X) - E_C(A)$

En el caso de que  $F$  sea un campo gradiente,  $\nabla \varphi = F \Rightarrow \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_A^X \nabla \varphi \cdot d\vec{\alpha} = \varphi(X) - \varphi(A)$

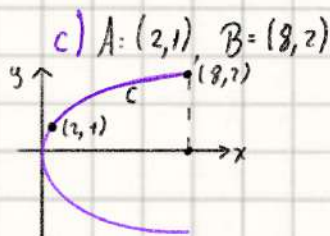
De donde, si  $F$  es campo gradiente, con potencial  $\varphi$ , se tiene:

$$\begin{aligned} E_C(X) - E_C(A) &= \varphi(X) - \varphi(A) \\ E_C(X) + (-\varphi(X)) &= E_C(A) + (-\varphi(A)) \\ &\hookrightarrow \text{Energía Potencial} \end{aligned}$$

$$E_C(X) + E_p(X) = E_C(A) + E_p(A)$$

$\hookrightarrow$  Energía Mecánica

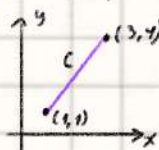
Así, si  $F$  es un campo gradiente, la energía mecánica permanece cte. Por tanto, a estas fuerzas se las llama **conservativas**.



En este caso, la curva si está definida en un conjunto conexo, perteneciente al dominio de  $\varphi$ . Así,

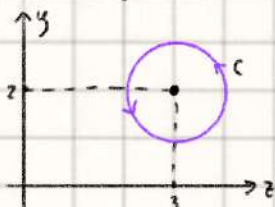
$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_A^B \nabla \varphi \cdot d\alpha = \varphi(B) - \varphi(A) = \arctg\left(\frac{2}{8}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

b)  $A=(1,1)$ ,  $B=(3,4)$



$$\int_C F \cdot d\alpha = \varphi(B) - \varphi(A) = \arctg\left(\frac{4}{3}\right) - \arctg(1)$$

d)  $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$



$$\oint_C F \cdot d\alpha = 0$$

15/12/2025

## Integral Múltiple

Se consideran campos escalares, definidos en regiones de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ .  
En  $\mathbb{R}^2$ , dado que son 2 variables, se denomina integral doble y en  $\mathbb{R}^3$  se denomina integral triple.

### integral doble

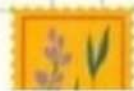
Sea un campo escalar de la forma

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

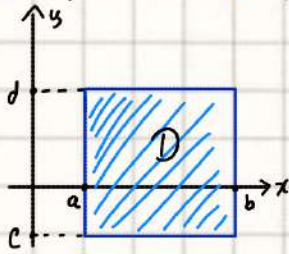
La integral doble de  $f$  sobre  $D$ , se denota:

$$\iint_D f(x, y) dx dy ; \iint_D f(x, y) dA ; \int_D f dA \rightarrow \text{notación menos usada}$$



Para el caso en el que  $D$  sea un rectángulo:

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$



La integral doble se define a través de las integrales reiteradas:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Observación: usualmente se omite paréntesis.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

**ejemplo:**  $D = [-1, 1] \times [-2, 1]$

$$f(x, y) = x + x^2 y - y^2$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-2}^1 (x + x^2 y - y^2) dy dx$$

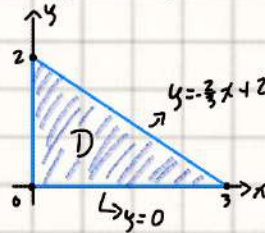
$$= \int_{-1}^1 \left( xy + \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{y=-2}^{y=1} dx$$

Para otro tipo de dominios, se define las llamadas **regiones elementales**.

✓ Tipo 1:  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , se dice que es de tipo 1 si existen 2 funciones  $\varphi_1, \varphi_2$  tq

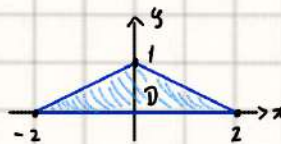
$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

① **ejemplo:**



$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x + 2\}$$

② **ejemplo:**



no es una región elemental de tipo 1.

✓ Tipo 2:  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  se dice que es de tipo 2 si existen 2 funciones:  $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

①  $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq 3 - \frac{3}{2}y\}$

②  $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1; 2y - 2 \leq x \leq -2y + 2\}$

✓ Tipo 3:  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  se dice que es de tipo 3 si puede expresarse como tipo 1 y tipo 2.

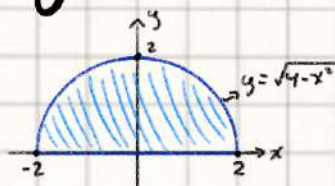
★ Si  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es de tipo 1, la integral doble se define por:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy dx$$

★ Si  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es de tipo 2, la integral doble se define de manera similar.

El orden de los diferenciales no tiene importancia mientras no estén puestos los límites de integración.

**ejemplo:**  $D$ : semicírculo:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ;  $y \geq 0$ .  $\iint_D xy dx dy = ?$



✓  $D = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\} \rightarrow$  Tipo 1

✓  $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2 \wedge -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\} \rightarrow$  Tipo 2

✓ Tomando  $D$  como región tipo 1:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left. \frac{1}{2} xy^2 \right|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2} x (4-x^2) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( 2x - \frac{1}{2} x^3 \right) dx \\ &= \left[ x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_{-2}^2 = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Propiedades y aplicaciones

propiedades

1.- Linealidad

2.- Aditividad: sea  $D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow \iint_D f dA = \iint_{D_1} f dA + \iint_{D_2} f dA$

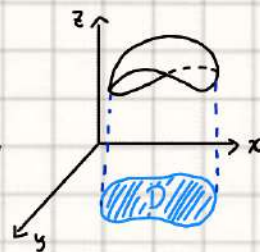
3.- Teorema de Fubini: Si  $D$  es una región de tipo 3, se la puede trabajar con representación tipo 1 y tipo 2.

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx dy = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y) dy dx$$

aplicaciones

1- Si:  $f(x,y) \equiv 1 \Rightarrow A(D) = \iint_D dx dy$

2- Sea una superficie de ecuación:  $z = f(x,y); z \geq 0$ ,  
 el volumen es:  $V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$   
 $V = \iint_D f(x,y) dx dy$



3- Si se considera una lámina en el dominio  $D$ ,  $f(x,y)$  representa la densidad, entonces:

•  $m = \iint_D f(x,y) dx dy$

•  $\bar{X} : m\bar{x}_i = \iint_D x_i f(x,y) dx dy$

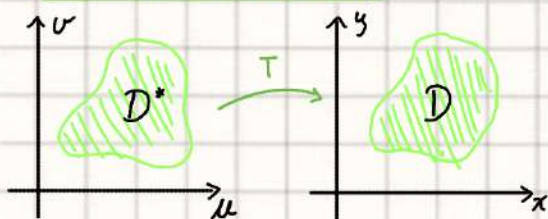
•  $I_L = \iint_D f(x,y) \delta^2(x,y) dx dy$

↳  $\delta(x,y)$ : distancia de  $(x,y)$  a L

16/12/2025

**Observación:** En algunos casos, al evaluar una integral doble, puede haber dificultad en la representación del dominio o en la integración. En estos casos, se recomienda utilizar un conveniente cambio de variable que elimine esta dificultad.

Cambio de variable



Sea  $T$  una transformación de la forma

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \rightarrow T(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

que sea inversible, tal que  $T(D^*) = D$

Sea  $J$  el determinante de la matriz Jacobiana:

↳ Da una medida del cambio de  $D$  (se achica o se agranda)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

cuando  $|J| \neq 0$ , la transformación es inversible.

Entonces:  $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) |J| du dv$

**Observación:** Cuando se hace el cambio de variable, no hay que olvidar el Jacobiano.

**Observación:** El cambio de variable usualmente es sugerido por la geometría del dominio o de la función a integrar.



**Observación** El dominio  $D^*$  se determina con las imágenes (pre imágenes) del dominio  $D$ .

**ejemplo:** Cambio a coordenadas polares. : "nuevas" variables  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$\Rightarrow |J| = r$

**ejemplo:** Coordenadas polares generalizadas (dominio con geometría elíptica :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ )

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases} ; |J| = abr$$

Deber II

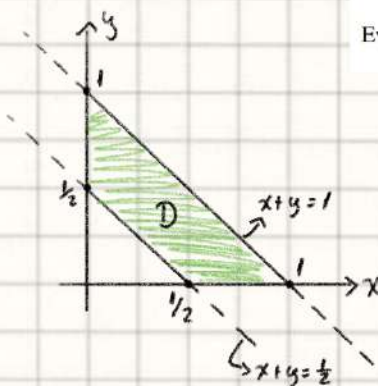
**ejemplo:**

3. Sea  $D = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1\}$ . Efectuando el cambio de variables:

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

En este problema, el dominio no representa mayor dificultad, sino, la función a integrar.

Evalúe la integral:  $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$



✓ Sea el cambio de variable:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

✓ Jacobiano:  $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

✓ Fronteras:

$x=0 \rightarrow u+v=0$

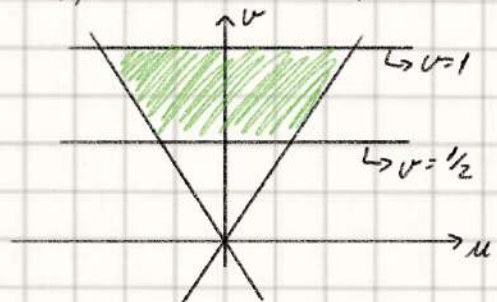
$y=0 \rightarrow v-u=0$

$x+y=\frac{1}{2} \rightarrow v=\frac{1}{2}$

$x+y=1 \rightarrow v=1$

✓ "Nuevo" dominio:  $D^*$ , de donde:

$$D^* = \{(u, v) : \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \wedge -v \leq u \leq v\}$$

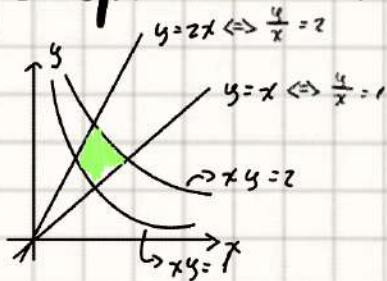


✓  $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \iint_{D^*} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^v dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 v (e - e^{-1}) dv = \left( \frac{e - e^{-1}}{2} \right) \frac{1}{2} v^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

**ejemplo:**  $A(D) = \iint_D dx dy$



✓ Cambio de variable:

$$\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u^{1/2} v^{-1/2} \\ y=u^{1/2} v^{1/2} \end{cases}$$

✓ Calculamos el Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{-1/2} & -\frac{1}{2} u^{1/2} v^{-3/2} \\ \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{1/2} & \frac{1}{2} u^{1/2} v^{-1/2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$$

✓ Fronteras:

$xy=1 \rightarrow u=1$

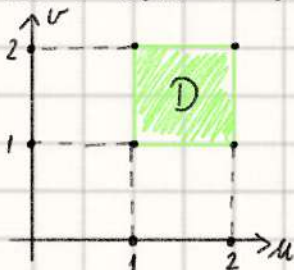
$xy=2 \rightarrow u=2$

$\frac{y}{x}=1 \rightarrow v=1$

$\frac{y}{x}=2 \rightarrow v=2$

✓  $A(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} 1 \cdot \frac{1}{2v} du dv$

✓ "Nuevo" Dominio  $D^*$ :



$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{v} du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \ln|v| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

**ejemplo:**

5. Al calcular por doble integración el volumen  $V$  de un sólido situado por debajo del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y limitado inferiormente por una cierta región  $D$  del plano  $xy$ , se ha llegado a la siguiente suma de integrales:

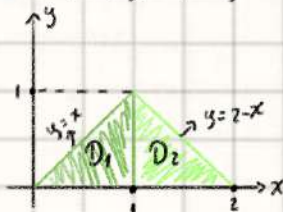
$$V = \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy dx$$

Dibuje la región de integración y calcule  $V$  intercambiando el orden de integración y usando coordenadas polares.

★  $D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$

★  $D_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2-x\}$

★  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$



✓ Sea  $D = D_1 \cup D_2 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 2-y\}$

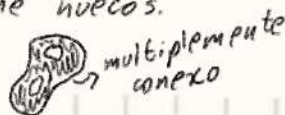
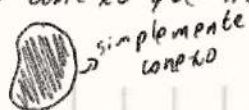
$$\Rightarrow V = \iint_{D_1} f dA + \iint_{D_2} f dA$$

$$= \iint_D f dA$$

$$= \int_0^1 \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy$$



Curva de Jordan: curva continua que no se cruza a sí misma  
 Conj. simp. conexo: conjunto conexo que no tiene huecos.



**Teorema de Green:** Sea un campo vectorial  $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $C$  una curva de Jordan cerrada, recorrida en sentido positivo, contenida en un conjunto simplemente conexo. Sea  $D$  la región limitada por la curva  $C$ . Entonces:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

**Observación:** Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , una región simplemente conexa.

$A(D) = \iint_D dx dy$ : función a integrar:  $f(x,y) = 1$ .

Si se desea evaluar el área a través de una integral de línea, por el Teorema de Green, se deben buscar 2 funciones:  $P = P(x,y)$  y  $Q = Q(x,y)$  diferenciables tales que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Ej:  $P(x,y) = 0; Q(x,y) = x \Rightarrow A(D) = \oint_C x dy$

$Q(x,y) = 0; P(x,y) = -y \Rightarrow A(D) = \oint_C -y dx$

$P(x,y) = y; Q(x,y) = 2x \Rightarrow A(D) = \oint_C y dx + 2x dy$

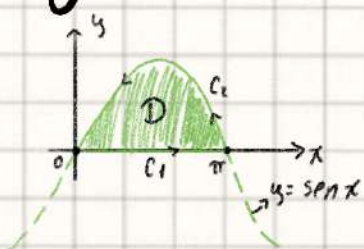
$P(x,y) = -\frac{1}{2}y; Q(x,y) = \frac{1}{2}x \Rightarrow A(D) = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$

↳ Esta es la que más se utiliza

↳ consultar el problema del planimetro y como está relacionado con el Teorema de Green.

**ejemplo:**

7. Usar el teorema de Green para calcular  $\oint_C (x-y) dx + y dy$ , donde  $C$  es la frontera de la región comprendida entre el eje de las  $x$  y la gráfica de  $y = \text{sen } x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ .



♥ Sea  $C = C_1 \cup C_2$

•  $C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$

•  $C_2: \begin{cases} x = t \\ y = \text{sen } t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$

$$\begin{aligned} \oint_C (x-y) dx + y dy &= \int_{C_1} (x-y) dx + y dy + \int_{C_2} (x-y) dx + y dy \\ &= \int_0^\pi [(t-0) + 0] dt - \int_0^\pi [(t - \text{sen } t) + \text{sen } t \cdot \text{cos } t] dt \\ &= \int_0^\pi (t - t + \text{sen } t - \text{sen } t \cdot \text{cos } t) dt \\ &= [-\text{cos } t - \frac{1}{2} \text{sen}^2 t] \Big|_0^\pi = 2 \end{aligned}$$

♥ Comprobación (Teorema de Green):

$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

- $P = x - y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-1) = 1$
- $Q = y$

•  $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \text{sen } x\} \Rightarrow \oint_C (x-y) dx + y dy = \iint_D 1 dx dy = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen } x} dx dy = \int_0^\pi \text{sen } x dx = -\text{cos } x \Big|_0^\pi = 2$

## Integral triple

Vamos a considerar campos escalares, definidos en dominios de  $\mathbb{R}^3: V$  tales que

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

La integral (triple) de  $f$  sobre  $V$  se denota:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad \iiint_V f dv ; \int_V f dv$$

↳ otras notaciones :

Para el cálculo de esta integral, se definen las llamadas Regiones Elementales en  $\mathbb{R}^3$ .

♥ Tipo 1:  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice que es de tipo 1 si su proyección en el plano  $xy$  es una región elemental de  $\mathbb{R}^2$ , la tercera variable  $z$ , está definida por 2 superficies:

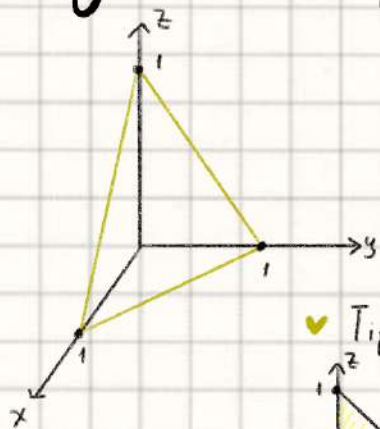
$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D; z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

♥ Tipo 2: la proyección se hace en  $xz$ .

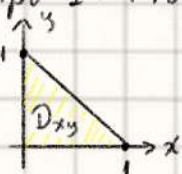
♥ Tipo 3: la proyección se hace en  $yz$ .

♥ Tipo 4: Unión de los 3 casos anteriores.

**ejemplo:** Sea  $V$  un sólido, delimitado por el primer cuadrante y el plano  $x+y+z=1$ .



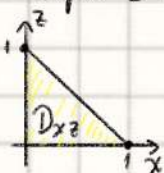
♥ Tipo 1: Proyección en plano  $xy$



$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x; 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq 1-y; 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

♥ Tipo 2: Proyección en plano  $xz$



$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq z \leq 1-x; 0 \leq y \leq 1-x-z\}$$

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1; 0 \leq x \leq 1-z; 0 \leq y \leq 1-x-z\}$$

♥ Tipo 3: idem

Es una región de tipo 4, pues se la puede expresar como tipo 1, 2 y 3.



Para evaluar la integral triple:

\* Si  $V$  es de Tipo 1:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy$$

\* Si  $V$  es de Tipo 2:

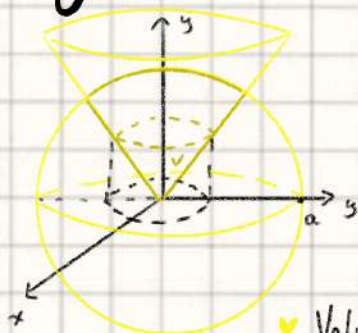
$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \int_{f_1(x,z)}^{f_2(x,z)} f(x,y,z) dy dx dz$$

\* Si  $V$  es de Tipo 3:

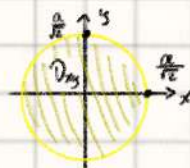
$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \int_{f_1(y,z)}^{f_2(y,z)} f(x,y,z) dx dy dz$$

Las propiedades y aplicaciones de la integral triple son similares a las de la integral doble.

**ejemplo:**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ;  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Proyección sobre el plano  $xy$ :  
Reemplazando:  $x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = a^2$   
 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} a^2$



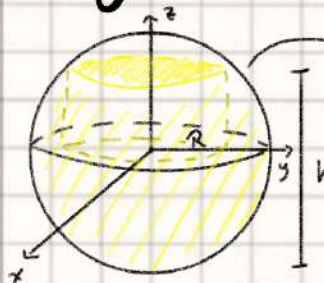
$V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 ; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$

Volumen =  $\iiint_V dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz dx dy = \iint_{D_{xy}} [\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy$

Tomamos el cambio de variable a coordenadas polares:

$\Rightarrow$  Volumen =  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} [\sqrt{a^2 - r^2} - r] r dr d\theta$

**ejemplo:** En una esfera de radio  $R$ , se tiene un líquido hasta la altura  $h$ . Calcule el volumen del líquido.



Esto es el caso cuando hay más de la mitad del líquido. Para el caso en el que es menos de la mitad, es completamente similar.

Volumen =  $V_{\text{esfera}} - V_{\text{vacío}}$   
 $= \frac{4}{3} \pi R^3 - V_{\text{vacío}}$

• Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

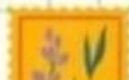
• Altura del líquido:  $h \rightarrow$  en el s.r:  $z = h - R$

• Proyección en el plano  $x,y$ :  $x^2 + y^2 = b^2$ ;  $b^2 = 2Rh - h^2$

$\Rightarrow V_{\text{vacío}} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq b^2 ; h - R \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$

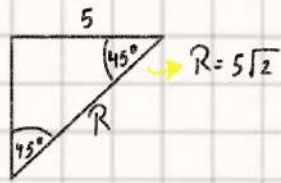
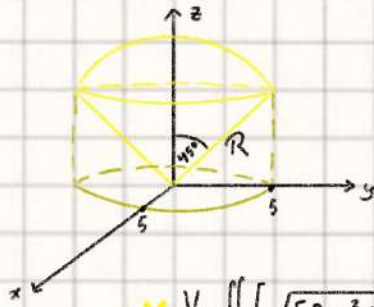
$\Rightarrow \iint_{D_{xy}} \int_{h-R}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz dx dy = \iint_{D_{xy}} [\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - h + R] dx dy$  : polares

tomamos un sist. de referencia con origen en el centro de la esfera.



**ejemplo:**

En una copa de Martini (copa cónica a  $45^\circ$ ), está llena de helado e inclusive, sobresale una abundante porción limitada por una superficie esférica, cuyo radio es igual a la generatriz de la copa. Si la boca de la copa es de 10 cm, calcule el volumen del helado.

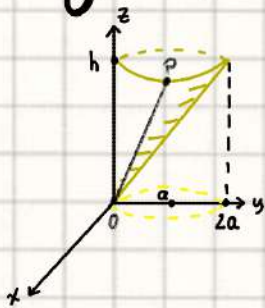


$$V = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 5^2; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{50 - x^2 - y^2}\}$$

$$V = \iint_{D_{xy}} [\sqrt{50 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \rightarrow \text{polares}$$

**ejemplo:**

Determinar la ec. del cono:



$\vec{OP}$ : Generatriz

$P = (x_0, y_0, z_0) \in \text{base}$

$$(x_0, y_0): x_0^2 + (y_0 - a)^2 = a^2$$

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ay_0 = 0$$

Coord. Polares:  $x_0 = r \cos \theta$ ;  $y_0 = r \sin \theta$

$$\Rightarrow r^2 - 2ar \sin \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2a \sin \theta \cos \theta \\ y_0 = 2a \sin^2 \theta \\ z_0 = h \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Generatriz: Porción de recta que pasa por el origen y tiene dirección  $\vec{OP} = P - O = \begin{pmatrix} 2a \sin \theta \cos \theta \\ 2a \sin^2 \theta \\ h \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{OP} = 0 + t \vec{OP}; 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at \sin \theta \cos \theta \\ 2at \sin^2 \theta \\ ht \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1 \quad \therefore \begin{cases} x = 2at \cos \theta \sin \theta \\ y = 2at \sin^2 \theta \\ z = ht \end{cases}; 0 \leq t \leq 1; 0 \leq \theta \leq \pi$$

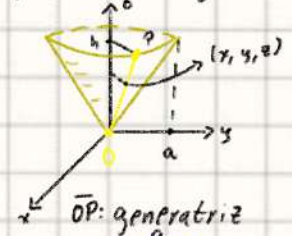
Es la representación paramétrica del cono

Par la representación cartesiana, hay que eliminar los parámetros  $(t, \theta)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4a^2 t^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4a^2 t^2 \sin^4 \theta \\ &= 4a^2 t^2 \sin^2 \theta \\ &= 2at (2at \sin^2 \theta) \\ &= 2at y \end{aligned}$$

$$t = \frac{z}{h} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{2a}{h} y z}$$

Para encontrar la ecuación de un cono, se debe determinar la ec. que cumplen los puntos de la generatriz.



$$\frac{z}{h} = \frac{y}{a} \Rightarrow z = \frac{h}{a} y$$

$$z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Cambio de variable

Sea  $T$  una transformación lineal inversible, tal que:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v, w) \mapsto T(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}; T(V^*) = V$$

Sea el Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

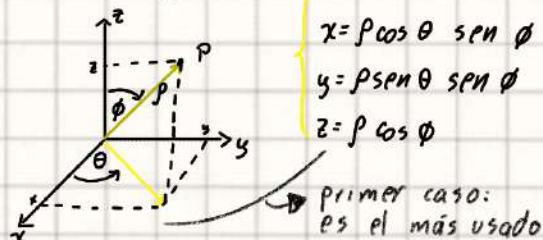
El cambio de variable, en general debe ser sugerido por el dominio o la geometría a utilizar.

Para determinar el nuevo dominio  $V^*$ , se debe buscar las preimágenes (imágenes) de los puntos en la frontera.

★ **Coordenadas cilíndricas:** "nuevas" variables:  $(r, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad J = r$$

★ **Coordenadas esféricas:**



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

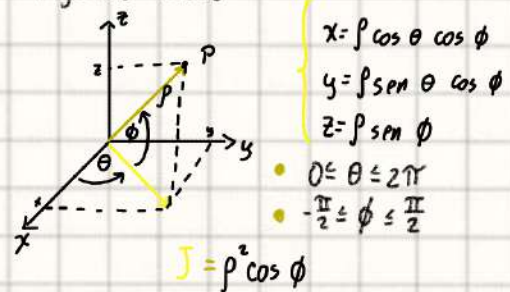
primer caso:  
es el más usado

•  $\theta$ : ángulo ecuatorial  $\Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$

•  $\phi$ : ángulo azimutal  $\Rightarrow 0 \leq \phi \leq \pi$

$$J = \rho^2 \sin \phi$$

Segundo caso:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \cos \phi \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}$$

•  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

•  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$$J = \rho^2 \cos \phi$$

Valor promedio de una función:

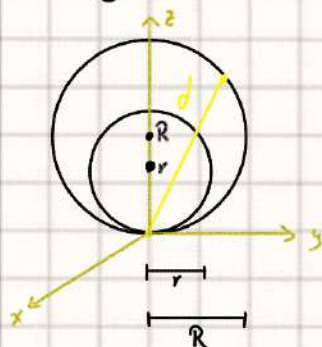
• Integral de línea:  $\bar{f} = \frac{\int_C f ds}{\int_C ds}$

• Integral doble:  $\bar{f} = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}$

• Integral triple:  $\bar{f} = \frac{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}$

# ejemplo:

Hallar la distancia promedio hasta el punto común de las esferas de radio  $r$  y  $R$ , respectivamente, tales que:



$$\bar{d} = \frac{\iiint_V d(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}$$

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- ✓ Esfera externa:  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$
- ✓ Esfera interna:  $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \text{Volúmen de la región de integración} \\ &= V_{\text{esf. ext.}} - V_{\text{esf. int.}} \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \end{aligned}$$

$$\iiint_V \text{distancia } dx dy dz = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

- Tomamos el cambio a coord. esféricas:  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}; J = \rho^2 \sin \phi; 0 \leq \phi \leq \pi$

- "Nuevo" dominio:  $V^* = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}; 2r \cos \phi \leq \rho \leq 2R \cos \phi\}$

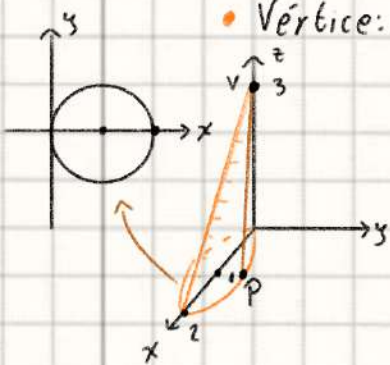
↳ Fronteras: esferas

$$\text{✓ Esfera int.: } x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0 \Rightarrow \rho^2 - 2r\rho \cos \phi = 0 \Rightarrow \rho = 2r \cos \phi$$

$$\text{✓ Esfera ext.: } x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0 \Rightarrow \rho^2 - 2R\rho \cos \phi = 0 \Rightarrow \rho = 2R \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{2r \cos \phi}^{2R \cos \phi} \rho \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_{2r \cos \phi}^{2R \cos \phi} d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi [8R^3 \cos^3 \phi - 8r^3 \cos^3 \phi] d\phi d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos^3 \phi [R^3 - r^3] d\phi d\theta \\ &= \frac{2}{3} [R^3 - r^3] \int_0^{2\pi} [\cos^4 \phi]_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{2}{3} [R^3 - r^3] \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{2}{3} [R^3 - r^3] \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi}{3} [R^3 - r^3] \blacksquare \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Encuentre el centroide del cono homogéneo, con vértice en  $(0,0,3)$  y base  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  Densidad  $\equiv$  cte



• Vértice:  $(0,0,3)$

• Base:  $x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

cte:  $\delta$

$$\checkmark m \bar{x} = \iiint_V x f(x,y,z) dx dy dz$$

$$\checkmark m = \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$$

$$= \delta \iiint_V dx dy dz \quad \rightarrow \text{Volumen}$$

• Debemos determinar la ec. del cono  $\equiv$

$$P \in \text{base} \Rightarrow P \in (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow P = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1$$

$$x_0^2 - 2x_0 + y_0^2 = 0$$

• Coord. Polares:  $x_0 = r \cos \theta$ ;  $y_0 = r \sin \theta \Rightarrow r^2 - 2r \cos \theta = 0$

$$r = 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow P = \begin{cases} x_0 = 2 \cos^2 \theta \\ y_0 = 2 \sin \theta \cos \theta \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

• Generatriz: Porción de recta que pasa por  $\overline{VP}$ , con parámetro  $t$  y dirección  $\overline{VP} = P - V = (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, -3)$

$$\overline{VP} = V + t \overline{VP}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t \cos^2 \theta \\ 2t \sin \theta \cos \theta \\ 3 - 3t \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1 \quad \therefore \overline{VP} = \begin{cases} x = 2t \cos^2 \theta \\ y = 2t \sin \theta \cos \theta \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

• Representación Cartesiana: eliminamos los parámetros  $\equiv$

$$x^2 + y^2 = 4t^2 \cos^4 \theta + 4t^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$z = 3 - 3t \Rightarrow t = \frac{1}{3}(3 - z)$$

$$= 4t^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= 4t^2 \cos^2 \theta$$

$$= 2t(2t \cos^2 \theta)$$

$$= 2tx$$

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}x(3 - z)$$

$\Leftrightarrow$

$$z = 3 - \frac{2}{3}x \left( \frac{y^2}{x} \right)$$

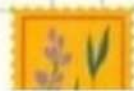
$$\heartsuit V = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq z \leq 3 - \frac{z}{2}(x + \frac{y^2}{x})\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \bar{x} &= \iiint_V \delta x \, dx \, dy \, dz \\ &= \delta \iiint_V x \, dx \, dy \, dz \\ &= \delta \iint_{D_{xy}} \int_0^{3 - \frac{z}{2}(x + \frac{y^2}{x})} x \, dz \, dx \, dy \end{aligned}$$

\* Tomamos el cambio a coord. cilíndricas:

$$V^* = \{(r, \theta, z) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq 2 \cos \theta; 0 \leq z \leq 3 - \frac{z}{2} \left( \frac{r}{\cos \theta} \right)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \bar{x} &= \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{3 - \frac{z}{2} \left( \frac{r}{\cos \theta} \right)} r \cos \theta \cdot r \, dz \, dr \, d\theta \\ &\quad \text{↳ Se cobianco =} \\ &= \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \cos \theta \left[ 3 - \frac{z}{2} \frac{r}{\cos \theta} \right] dr \, d\theta \\ &= 3 \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \left[ r^2 \cos \theta - \frac{1}{2} r^3 \right] dr \, d\theta \\ &= 3 \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{1}{3} r^3 \cos \theta - \frac{1}{8} r^4 \right] \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 3 \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{8}{3} \cos^4 \theta - 2 \cos^4 \theta \right] d\theta \\ &= 2 \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta [4 - 3] d\theta \\ &= 2 \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta \end{aligned}$$



**Ejercicio:**  $\iiint_V xy^2 dx dy dz$ .  $V$  sólido en el primer octante, limitado por los paraboloides:  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ , los cilindros:  $xy = 1$ ,  $xy = 4$  y los planos:  $y = x$ ,  $y = 5x \xrightarrow{L} \frac{x^2 y^2}{2} = 1, \xrightarrow{L} \frac{x^2 y^2}{2} = \frac{1}{2}$

✓ Cambio de variables:  $\xrightarrow{L} \frac{y}{x} = 1 \xrightarrow{L} \frac{y}{x} = 5$

$$\begin{cases} u = \frac{x^2 + y^2}{2} \\ v = xy \\ w = \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{w}} \\ y = \sqrt{vw} \\ z = uv(w + \frac{1}{w}) \end{cases} \Rightarrow J = \frac{v}{2} (1 + \frac{1}{w^2})$$

✓ "Nuevo" dominio:  $V^* = \{(u, v, w) : \frac{1}{2} \leq u \leq 1; 1 \leq v \leq 4; 1 \leq w \leq 5\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_V xy^2 dx dy dz &= \iiint_{V^*} \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{vw} uv(w + \frac{1}{w}) \cdot \frac{v}{2} (1 + \frac{1}{w^2}) du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V^*} uv^3 (w + \frac{1}{w}) (1 + \frac{1}{w^2}) du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V^*} uv^3 w (1 + \frac{1}{w})^2 du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V^*} uv^3 w (1 + \frac{2}{w} + \frac{1}{w^2}) du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V^*} [uv^3 w + 2uv^3 \frac{1}{w} + uv^3 \frac{1}{w^2}] du dv dw \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^4 \int_1^5 [uv^3 w + 2uv^3 \frac{1}{w} + uv^3 \frac{1}{w^2}] dw dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^4 [\frac{1}{2} uv^3 w^2 + 2uv^3 \ln|w| - \frac{1}{2} uv^3 \frac{1}{w}] \Big|_1^5 dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^4 [12 uv^3 + 2 \ln|5| uv^3 + \frac{12}{5} uv^3] dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 [3uv^4 + \frac{1}{2} \ln|5| uv^4 + \frac{3}{5} uv^3] \Big|_1^4 du \end{aligned}$$



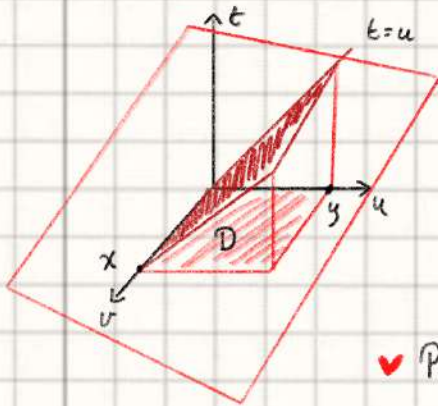
07/01/2025

Deber 11

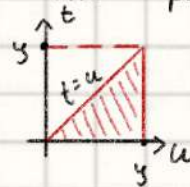
ejemplo:

36. Demuestre que:  $\int_0^x \int_0^y \int_0^t f(t) dt du dv = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$

♥  $V = \{(t, u, v) : 0 \leq v \leq x; 0 \leq u \leq y; 0 \leq t \leq u\}$ : proyección sobre el plano  $uv$

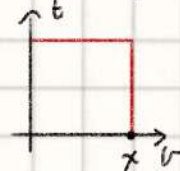


♥ Representemos el dominio proyectado sobre el plano  $ut$



$$V = \{(t, u, v) : 0 \leq t \leq y; 0 \leq v \leq x; t \leq u \leq y\}$$

♥ Proyección sobre el plano  $vt$

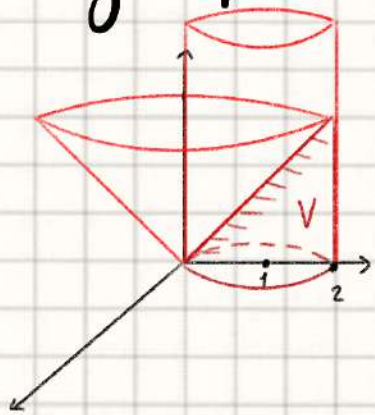


$$V = \{(t, u, v) : 0 \leq t \leq y; 0 \leq v \leq x; t \leq u \leq y\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^x \int_0^y \int_0^t f(t) dt du dv &= \int_0^y \int_0^x \int_0^t f(t) du dv dt \\ &= \int_0^y \int_0^x f(t) \cdot u \Big|_0^t dv dt \\ &= \int_0^y \int_0^x f(t) (y-t) dv dt \\ &= \int_0^y f(t) (y-t) v \Big|_0^x dt \\ &= \int_0^y f(t) (y-t) x dt \end{aligned}$$

\* El ejercicio no sale, es decir, está mal planteado.

**ejemplo:**



$z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ;  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Calcular el volumen del sólido exterior al cono e interior al cilindro, para los valores de  $z$  positivos

✓ Dominio:

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 ; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

✓ Cambio a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta & ; J = r \\ z = z \end{cases}$$



✓ "Nuevo" dominio:  $V^* = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi ; 0 \leq r \leq \sin \theta ; 0 \leq z \leq r\}$

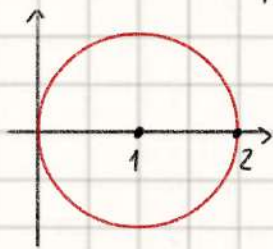
✓ Volumen =  $\iiint_V dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} \int_0^r r dz dr d\theta = \dots$

**ejemplo:**

$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)^{1/2} dz dy dx$  : Expresarla en coord. cilíndricas.

✓  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2 ; -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} ; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$   
 $\hookrightarrow D_{xy}$

✓ Proyección en el plano  $xy$ :



• Límites para  $y$ :

$$\begin{aligned} y = -\sqrt{2x-x^2} &\Rightarrow y^2 = 2x-x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ y = \sqrt{2x-x^2} &\Rightarrow y^2 = 2x-x^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

✓ coord. cilíndricas:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta & ; J = r \\ z = z \end{cases}$

✓ "Nuevo" dominio:  $V^* = \{(r, \theta, z) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ; 0 \leq r \leq 2 \cos \theta ; 0 \leq z \leq r\}$

$$\Rightarrow \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)^{1/2} dz dy dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^r r \cdot r dz dr d\theta$$



**ejemplo:**  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy$  : coord. esféricas

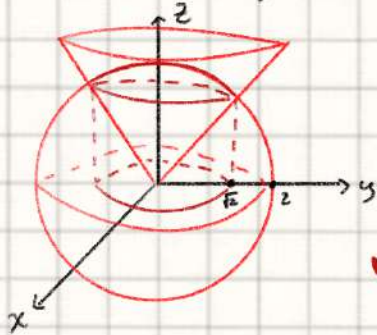
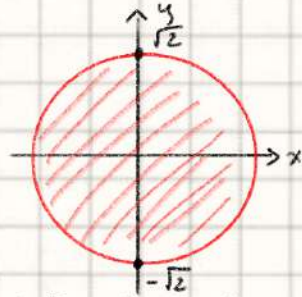
♥  $V: \{(x, y, z) : -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} ; -\sqrt{2-y^2} \leq x \leq \sqrt{2-y^2} ; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

♥ Proyección en el plano  $xy$ :

• Límites para  $x$ :

$$x = -\sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 = 2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 = 2-y^2$$



♥ coord. esféricas:  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi ; J = \rho^2 \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$

♥ "Nuevo" dominio:  $V^* = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi ; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} ; 0 \leq \rho \leq 2\}$

• Frontera: cono:  $z^2 = x^2 + y^2$

$$\rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi$$

$$\rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \phi$$

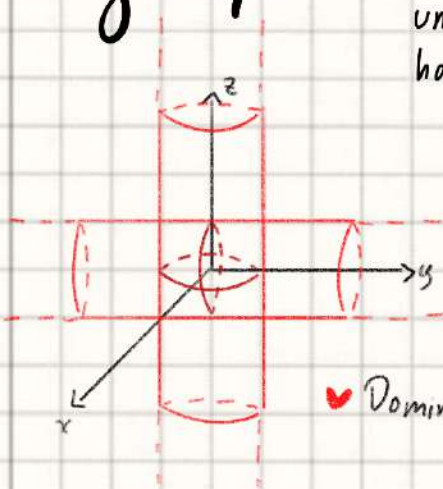
$$\cos^2 \phi = \sin^2 \phi \Rightarrow \cos \phi = \sin \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 \cos^2 \phi \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{32}{5} \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{32}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \phi \sin \phi (\theta) \Big|_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{64\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \\ &= -\frac{64\pi}{5} \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$



**ejemplo:**

Calcule el volumen del sólido que resulta al intersecar un cilindro circular vertical y un cilindro circular horizontal, ambos del mismo radio.



- Cilindro vertical:  $x^2 + y^2 = a^2$
- Cilindro horizontal:  $x^2 + z^2 = a^2$

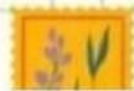
♥ Volumen:  $\iiint_V dx dy dz$

♥ Dominio:  $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2 ; -\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$

♥ Coord. Cilíndricas:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases} ; J = r$

♥ "Nuevo" dominio:

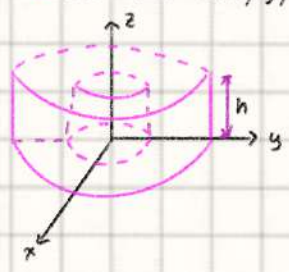
$$V^* = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq a ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; -\sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta}\}$$



# ejemplo:

35. Una arandela de una cierta aleación tiene radio interno 1 cm, radio externo 2 cm y no es homogénea, de modo que su densidad varía con la distancia al centro. Si la densidad superficial es de 0,58 g/cm<sup>3</sup> sobre su borde interno y de 0,77 g/cm<sup>3</sup> sobre el externo y suponemos que ella varía linealmente, ¿cuál es la masa de la arandela?

- densidad:  $f(x, y, z) = Kr + d$
- $r=1: f=0.58 \text{ (g/cm}^3\text{)}$
- $r=2: f=0.77 \text{ (g/cm}^3\text{)}$



en coordenadas polares:  $f = Kr + d$   
 $r=1: 0.58 = K + d \Rightarrow K = 0.19$   
 $r=2: 0.77 = 2K + d \Rightarrow d = 0.39$   
 densidad:  $f = 0.19r + 0.39$

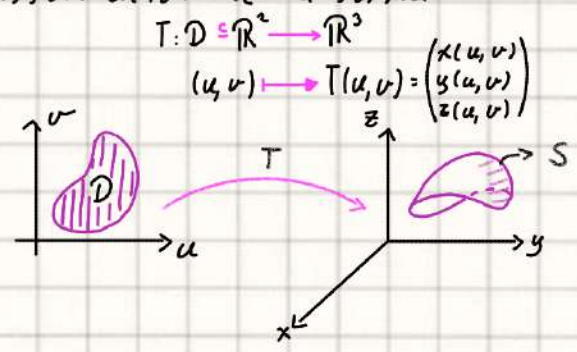
$$\text{masa} = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_1^2 (0.19r + 0.39)r dz d\theta dr$$

$$= \dots$$

# Integral DE Superficie

Se considerarán campos escalares y vectoriales, definidos únicamente en superficies parametrizables.

Una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice que es parametrizable, si es la imagen de una transformación de la forma:



$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}; (u, v) \in D$$

- ★ Superficie que es la grafica de una función:  $z = f(x, y)$
- Ej: cono:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- paraboloide:  $z = x^2 + y^2$
- hemisferio:  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

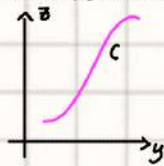
Para estas superficies una parametrización puede ser tomar a las variables independientes como parámetros:

$$S: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}; D: \text{proyección de } S \text{ sobre el plano } xy.$$



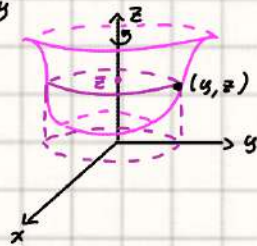
★ Superficies de revolución (sólidos de revolución)

Consideramos una curva en el plano  $yz$  que sea parametrizable



$$C: \begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}; a \leq t \leq b$$

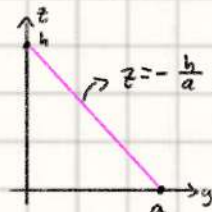
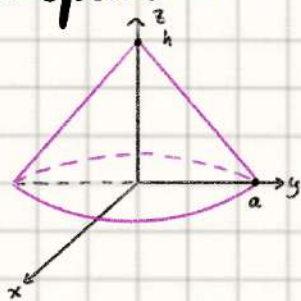
Al rotar alrededor del eje  $z$ , se obtiene una superficie de rotación



Al tomar un corte horizontal justo a la altura  $z = f(y, z)$ . Así, se obtiene la parametrización

$$S: \begin{cases} x = y(t) \cos \theta \\ y = y(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases}; \begin{matrix} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

**ejemplo:** Cono

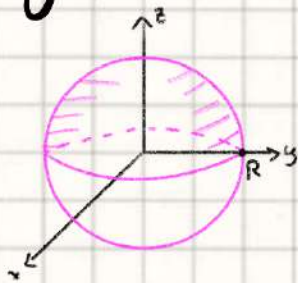


$$z = -\frac{h}{a}y + h; 0 \leq y \leq a$$

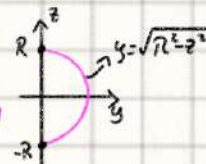
$$C: \begin{cases} y = t \\ z = -\frac{h}{a}t + h \end{cases}; 0 \leq t \leq a$$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \\ z = -\frac{h}{a}t + h \end{cases}; \begin{matrix} 0 \leq t \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

**ejemplo:** Esfera

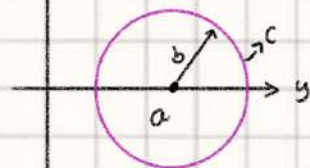
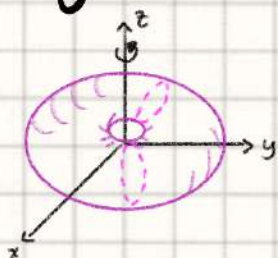


$$C: \begin{cases} y = R \cos \phi \\ z = R \sin \phi \end{cases}; -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = R \cos \phi \cos \theta \\ y = R \cos \phi \sin \theta \\ z = R \sin \phi \end{cases}; \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

**ejemplo:** Toro



$$C: \begin{cases} y = a + b \cos \phi \\ z = b \sin \phi \end{cases}; 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = (a + b \cos \phi) \cos \theta \\ y = (a + b \cos \phi) \sin \theta \\ z = b \sin \phi \end{cases}; \begin{matrix} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

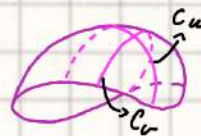


En general, dada una superficie parametrizable:

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v); (u, v) \in D \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

cuando se toma el valor de  $v$  fijo:  $v = v_0$ , se obtiene una curva que está contenida en la superficie

$$C_{v_0}: \begin{cases} x = x(u, v_0) = x(u) \\ y = y(u, v_0) = y(u) \\ z = z(u, v_0) = z(u) \end{cases}$$



El valor formado por las derivadas:  $T_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  es tangente a la curva y por lo tanto, tangente a la superficie.

De igual forma, al tomar  $u = u_0$ , siguiendo lo dicho anteriormente, tenemos

$$C_{u_0}: \begin{cases} x = x(u_0, v) = x(v) \\ y = y(u_0, v) = y(v) \\ z = z(u_0, v) = z(v) \end{cases} \quad \text{y} \quad T_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Así, el producto vectorial de  $T_u$  y  $T_v$  es normal a  $S$ .

• Vector Normal:  $N = T_u \times T_v$

$$N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + \hat{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$N = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}; \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}; \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

$$N = (dy \wedge dz; dz \wedge dx; dx \wedge dy)$$

**ejemplo:**

$S$  gráfica de  $z = f(x, y)$

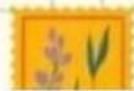
$$S: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}; D: \text{proyección de } S \text{ sobre plano } xy$$

$$\heartsuit \quad dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\heartsuit \quad dx \wedge dz = \frac{\partial(x, z)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\heartsuit \quad dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow N = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; 1 \right)$$



## ejemplo: Esfera

$$S: \begin{cases} x = R \cos \phi \cos \theta \\ y = R \cos \phi \sin \theta \\ z = R \sin \phi \end{cases}$$

$$\heartsuit \, dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \cos \theta \\ -R \sin \phi \sin \theta & R \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} = R^2 \cos^2 \phi \cos \theta$$

$$\heartsuit \, dx \wedge dz = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{vmatrix} 0 & -R \cos \phi \sin \theta \\ R \cos \phi & -R \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} = R^2 \cos^2 \phi \sin \theta$$

$$\heartsuit \, dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{vmatrix} -R \cos \phi \sin \theta & R \cos \phi \cos \theta \\ -R \sin \phi \cos \theta & -R \sin \phi \sin \theta \end{vmatrix} = R^2 \sin^2 \phi \cos \theta \cos \phi + R^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta = R^2 \cos \phi \sin \phi$$

$$\Rightarrow N = (R^2 \cos^2 \phi \cos \theta; R^2 \cos^2 \phi \sin \theta; R^2 \cos \phi \sin \phi) \\ = R \cos \phi (R \cos \theta \cos \phi; R \sin \theta \cos \phi; R \sin \phi) \quad \text{colineal al vector posición } \downarrow \\ \hookrightarrow (x, y, z)$$

13/01/2026

## Integral DE superficie de campo escalar

Sea un campo escalar  $\mathcal{Q}$  definido en  $S$  tal que

$$\mathcal{Q}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow \mathcal{Q}(x, y, z)$$

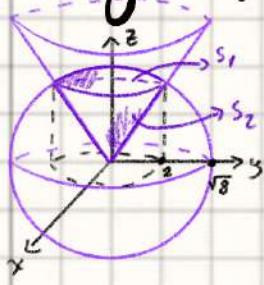
La integral de superficie de  $\mathcal{Q}$  sobre  $S$ , se denota y define por:

$$\iint_S \mathcal{Q}(x, y, z) \, ds = \iint_D \mathcal{Q}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|N\| \, du \, dv$$

**Observación:** para esta integral, las propiedades y aplicaciones son similares a las ya conocidas (linealidad, aditividad y cambio de parametrización)

## ejemplo:

2. Calcule el área del sólido limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  y el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



$\heartsuit$  Intersección de las 2 superficies: radio  $r=2$

$$\heartsuit \, S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow A(S) = \iint_S ds = \iint_{S_1} ds + \iint_{S_2} ds$$

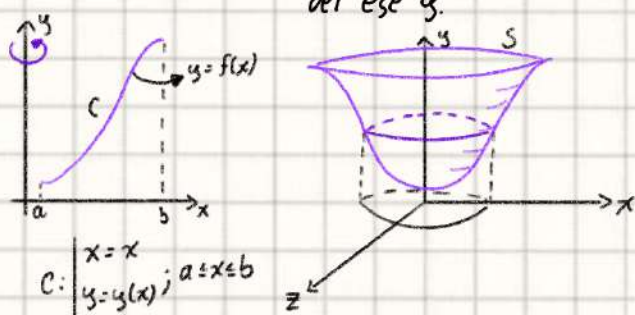
$$\heartsuit \, \text{Parametrización: } \bullet S_1: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}; D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\} \\ N_1 = \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1 \right)$$

$$\bullet S_2: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=\sqrt{8-x^2-y^2} \end{cases}; D: \text{idem}$$

$$N_2 = \left( \frac{x}{\sqrt{8-x^2-y^2}}; \frac{y}{\sqrt{8-x^2-y^2}}; 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(S) &= \iint_{S_1} dS + \iint_{S_2} dS \\ &= \iint_D \|N_1\| dx dy + \iint_D \|N_2\| dx dy \\ &= \iint_D \left[ \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8-x^2-y^2}}} \right] dx dy \quad \text{cambiamos a polares} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \left[ \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8-r^2}}} \right] r d\theta dr \end{aligned}$$

**ejemplo:** Encontrar el área de una superficie de rotación obtenida al rotar una curva definida en el plano  $xy$ , alrededor del eje  $y$ .



$$S: \begin{cases} x = x \cos \theta \\ y = f(x) \\ z = x \sin \theta \end{cases}; \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

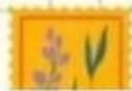
$$\bullet \text{ Vector Normal: } \checkmark dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(x) & \sin \theta \\ 0 & x \cos \theta \end{vmatrix} = f'(x) x \cos \theta$$

$$\checkmark dx \wedge dz = \frac{\partial(x, z)}{\partial(x, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ x \cos \theta & -x \sin \theta \end{vmatrix} = -x \sin^2 \theta - x \cos^2 \theta = -x$$

$$\checkmark dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & f'(x) \\ x \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -f'(x) x \cos \theta$$

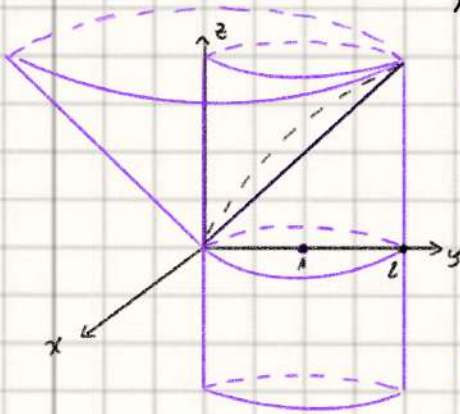
$$\Rightarrow N = (f'(x) x \cos \theta; -x; -f'(x) x \cos \theta)$$

$$\checkmark \|N\| = |x| \sqrt{1 + f'(x)^2}$$



# ejemplo:

Encuentre el área de la ventana de Viviani, la cual es la intersección del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el cilindro  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ .



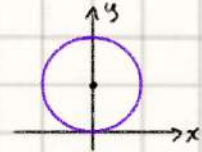
\* Parametrización 1:  $S: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}; D = \{(x,y): x^2+(y-1)^2 \leq 1\}$

$\Rightarrow N = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; 1 \right); \|N\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow A(S) = \iint_S dS = \iint_D \|N\| dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} A(D) = \pi\sqrt{2}$  ■

\* Parametrización 2: polares

$S: \begin{cases} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \\ z=r \end{cases}; D = \{(r, \theta): 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 2 \sin \theta\}$



$\Rightarrow$  Vector Normal:  $N = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r)$

♥  $dy \wedge dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta & 1 \\ r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -r \cos \theta$

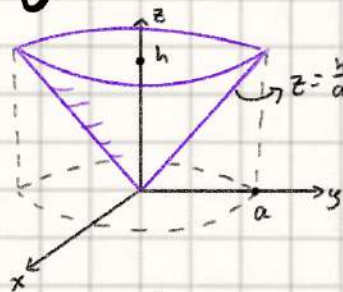
♥  $dx \wedge dz = \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -r \sin \theta$

♥  $dx \wedge dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$

$\Rightarrow \|N\| = \sqrt{2} r \Rightarrow A(S) = \iint_S dS = \iint_D \|N\| dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r dr d\theta$



**ejemplo:** Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura  $h$  y radio de la base  $a$ , respecto al eje  $z$ .



$z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$

$\heartsuit$  Parametrización:  $S: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}; D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

$\heartsuit$  Vector Normal:  $N = \left(-\frac{hx}{a\sqrt{x^2+y^2}}; -\frac{hy}{a\sqrt{x^2+y^2}}; 1\right)$

$\Rightarrow \|N\| = \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + h^2}$

$\heartsuit$  Momento de inercia respecto al eje  $z$ :

Dado que no se menciona nada respecto a la densidad, asumimos que es cte  $\Psi = k$

$I_z = \iint_S \Psi \cdot \delta^2 ds$

$\delta = \delta(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\hookrightarrow$  distancia al eje  $z$

$\hookrightarrow$  densidad

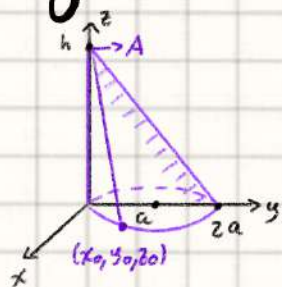
$= k \iint_S \delta^2 ds$

$= k \iint_D [(x^2 + y^2)] \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + h^2} dx dy$

$= \frac{1}{a} k \sqrt{a^2 + h^2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  : cambiamos a polares

$= \frac{1}{a} k \sqrt{a^2 + h^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r d\theta dr$

**ejemplo:** Calcular el área del cono cuyo vértice está en el punto  $(0,0,h)$  y cuya base coincide con la circunferencia  $x^2 + (y-a)^2 = a^2$



$\heartsuit$  Determinamos la ec. del cono

- Generatriz: segmento de recta que va de  $A = (0,0,h)$  hasta el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- Tomamos coordenadas polares:

$$\begin{cases} x_0 = r \cos \theta \\ y_0 = r \sin \theta \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + (y_0 - a)^2 = a^2 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 2ay_0$$

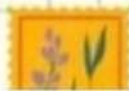
$$r^2 = 2a r \sin \theta$$

$$r = 2a \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2a \cos \theta \sin \theta \\ y_0 = 2a \sin^2 \theta \end{cases}; 0 \leq \theta \leq \pi$$

• Recta  $\overline{AP_0}$ :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 - h \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow S: \begin{cases} x = t 2a \cos \theta \sin \theta \\ y = t 2a \sin^2 \theta \\ z = (1-t)h \end{cases}; \begin{matrix} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix}$

$\heartsuit$  Vector Normal: ~~~~~



## Integral DE superficie de campo vectorial

Consideraremos una superficie parametrizable:

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}; (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

con vector normal  $N = (dy \wedge dz; dx \wedge dz; dx \wedge dy)$  y  $F$  un campo vectorial definido en  $S$  tal que

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

La integral de superficie de  $F$  sobre la superficie  $S$ , se denota y define por:

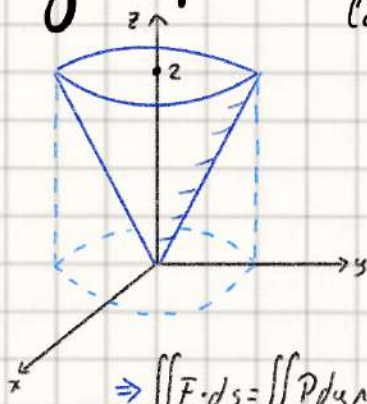
$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot ds &= \iint_D F(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) \cdot N \, du \, dv \\ &= \iint_D \begin{pmatrix} P(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) \\ Q(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) \\ R(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dx \wedge dz \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} du \, dv \\ &= \iint_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy \end{aligned}$$

**ejemplo:**

$$F(x, y, z) = (y+z; x+z; x+y)$$

Calcular  $\iint_S F \cdot ds$

S: cono de vértice en el origen con altura 2 y radio en la base 1.



Parametrizando  $S$ :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}; D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vector Normal:  $N = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}; -\frac{\partial F}{\partial y}; 1\right) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}; -\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}; 1\right)$

↳ El vector  $N$  es interior

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_S F \cdot ds &= \iint_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy \\ &= \iint_S (y+z) \, dy \wedge dz + (x+z) \, dz \wedge dx + (x+y) \, dx \wedge dy \\ &= \iint_D \left[ (y+2\sqrt{x^2+y^2}) \left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+2\sqrt{x^2+y^2}) \left(-\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y) \right] dx \, dy \\ &= \iint_D \left[ -\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4x - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4y + x + y \right] dx \, dy \\ &= \iint_D \left[ -\frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 3x - 3y \right] dx \, dy \end{aligned}$$

**Observación:** este tipo de integrales tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- ① Linealidad
- ② Aditividad
- ③ Cambio de parametrización Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos parametrizaciones de  $S$ , entonces:

i) Si  $N_1$  y  $N_2$  tienen la misma dirección, entonces:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_1 = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_2$$

ii) Si  $N_1$  y  $N_2$  tienen direcciones opuestas, entonces:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_1 = -\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_2$$

④ Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial,  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario a  $S$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds$$

En cuanto a aplicaciones, se tiene:

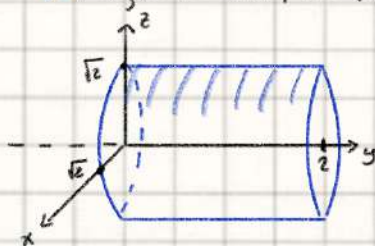
**Flujo de Fluidos:** si un fluido tiene como densidad de flujo a  $\mathbf{F}$  (densidad · velocidad), entonces, la integral de superficie representa el flujo del fluido a través de  $S$  por unidad de tiempo.

**Transferencia de Calor:** Sea  $T=T(x,y,z)$  es la temperatura en el punto  $(x,y,z)$ ,  $k$  es la capacidad calorífica  $\Rightarrow$  el flujo de calor es  $\mathbf{F} = -k \nabla T$ . La integral de superficie determina la cantidad de calor que fluye por la superficie por unidad de tiempo.

## ejemplo:

8. Si un campo escalar  $T$  representa una temperatura, entonces el calor fluye con el campo vectorial  $\mathbf{F} = -k \nabla T$ , donde  $k$  es una constante positiva que depende del material. Si la temperatura de un medio es  $T(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2$ , calcule el flujo de calor a través de la superficie  $x^2 + z^2 = 2, 0 \leq y \leq 2$ , si  $k=1$ .

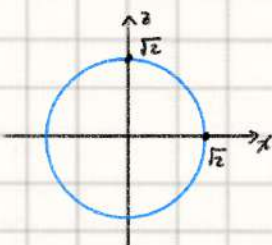
Flujo:  $\mathbf{F} = -k \nabla T = -\nabla T = (-6x, 0, -6z)$



Flujo de calor =  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S -6x dy dz + 0 dz dx - 6z dx dy$

Parametrizamos  $S$ : coord. polares

$$S: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = y \\ z = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$



Vector normal =  $\mathbf{N} = (-\sqrt{2} \cos \theta; 0; -\sqrt{2} \sin \theta)$ : Vector normal interior al cilindro

$dy dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} \cos \theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2} \cos \theta$

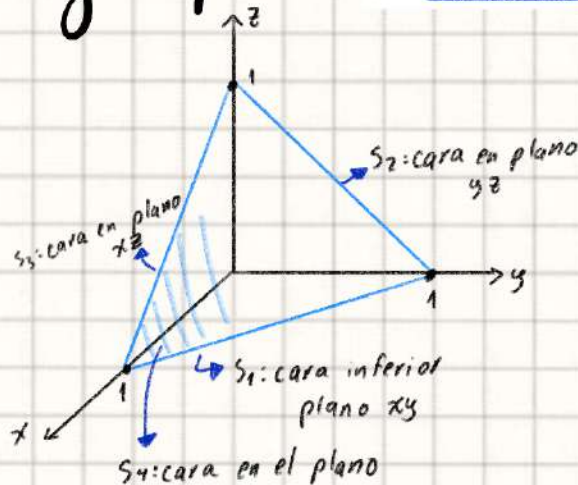
$dx dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta & -\sqrt{2} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$        $dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2} \sin \theta$

$$\Rightarrow \text{Flujo de calor} = \iint_D [(-6\sqrt{z} \cos\theta)(-\sqrt{z} \cos\theta) + 0 + (-6\sqrt{z} \sin\theta)(-\sqrt{z} \sin\theta)] d\theta dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 12 dy d\theta = \int_0^{2\pi} 12y \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 24 d\theta = 48\pi$$

**ejemplo:**

9. Calcular el flujo del campo vectorial  $F(x, y, z) = (xz, xy, yz)$  a través del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano  $x + y + z = 1$  con sus normales apuntando hacia el exterior.



Flujo de  $F = (xz, xy, yz)$

$$\Rightarrow \oiint F \cdot ds = \iint_{S_1} F \cdot ds + \iint_{S_2} F \cdot ds + \iint_{S_3} F \cdot ds + \iint_{S_4} F \cdot ds$$

Parametrizamos las superficies:

- $S_1: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=0 \end{cases}; D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$

$N_1 = (0, 0, 1)$ : interior

- $S_2: \begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=z \end{cases}; D_2 = \{(y,z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y\}$

$N_2 = (1, 0, 0)$ : interior

- $S_3: \begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=z \end{cases}; D_3 = \{(x,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x\}$

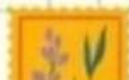
$N_3 = (0, 1, 0)$ : interior

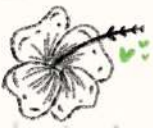
- $S_4: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=1-x-y \end{cases}; D_4 = \dots$

$N_4 = (-1-y, -1-x, 1)$ : interior

$\Rightarrow \oiint F \cdot ds = \iint_{D_1} (x \cdot 0 + x \cdot y + y \cdot 0) dx dy - \iint_{D_2} (0 \cdot z + 0 \cdot y + y \cdot z) dy dz + \dots$

*N obtenido es interior, pero se pide hacia exterior*





20/01/2026

Existen algunos Teoremas que nos ayudan a relacionar los distintos tipos de integrales, vistas anteriormente. Estos son:

### Teorema de Stokes Es una generalización del Teorema de Green

Consideramos una superficie abierta  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , con frontera una curva  $C$  orientada de manera que su orientación y el vector normal a  $S$  satisfacen la llamada "regla de la mano derecha".

Sea  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $X \mapsto F(X) = (P(X); Q(X); R(X))$

un campo vectorial definido en  $S \cup C$  de clase  $C^1$ . Entonces:

$$\oint_C F \cdot d\alpha = \iint_S \nabla \times F \cdot ds$$



La superficie debe estar acotada en la curva

### ejemplo:

13. Sea  $C$  la curva de intersección del cilindro  $4x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $2x + y - z = 0$  y sea  $F(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$ .

Calcule  $\int_C F \cdot d\alpha$ , usando el teorema de Stokes

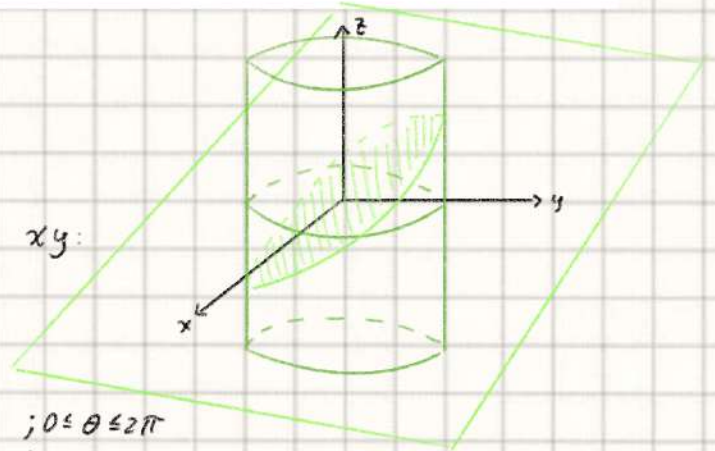
$C: \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

Parametrización de  $C$ :

★ Proyección de  $C$  sobre el plano  $xy$ :

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

★ Dado que  $z = 2x + y \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \end{cases}; 0 \leq \theta \leq 2\pi$



$\oint_C F \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$

$= \int_0^{2\pi} [(2 \cos \theta + 2 \sin \theta - 2 \sin \theta)(- \sin \theta) + (\cos \theta - 2 \cos \theta - 2 \sin \theta)(2 \cos \theta) + (2 \sin \theta - \cos \theta)(-2 \sin \theta + 2 \cos \theta)] d\theta$

$= \int_0^{2\pi} [-2 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta] d\theta$

$= \int_0^{2\pi} [-4 \sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta] d\theta$

$= \int_0^{2\pi} [2 \sin \theta \cos \theta - 4] d\theta = [\sin^2 \theta - 4\theta] \Big|_0^{2\pi} = -8\pi$



✓ Comprobamos con Stokes:

\* Tomemos  $S$  la superficie correspondiente a la porción del plano  $2x+y-z=0$  interior al cilindro

$$\begin{aligned} x &= x \\ S: y &= y; \quad D: \{(x, y): \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \leq 1\} \\ z &= 2x+y \end{aligned}$$

\* Vector normal:  $N = (-\frac{\partial F}{\partial x}; -\frac{\partial F}{\partial y}; 1) = (-2; -1; 1)$

\* Dado que  $F = (z-y; x-z; y-x)$ , entonces

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} = i(1+1) - j(-1-1) + k(1+1) = 2i + 2j + 2k$$

$$\Rightarrow \nabla \times F = (2, 2, 2)$$

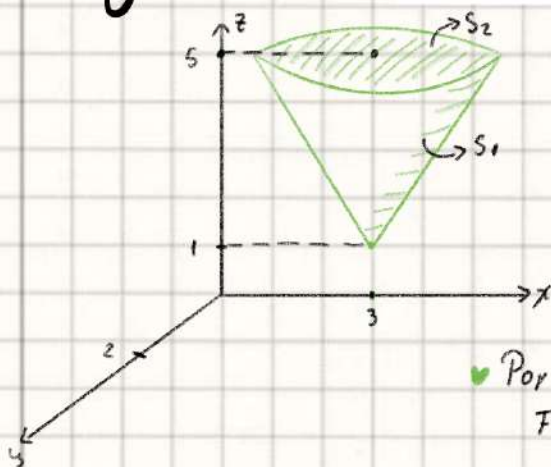
\* Por Teorema de Stokes:

$$\oint_C F \cdot dx = \iint_S \nabla \times F \cdot ds = \iint_S 2dy \wedge dz + 2dz \wedge dx + 2dx \wedge dy = \iint_D [2(-1-1) + 2(1-1) + 2(1)] dx dy = \iint_D -4 dx dy$$

$$= -4A(D) = -4\pi \cdot 1 \cdot 2 = -8\pi$$

**ejemplo:**

10. Calcular el flujo del campo vectorial  $(2x + 51 \tan(\frac{y}{z}); 3y - 814e^x; 212z + 6xy)$  a través de la superficie lateral y la base, orientadas hacia adentro, del cono vertical de radio de la base 3 y altura 4 cuyo vértice está en el punto  $(3, 2, 1)$ .



✓ Ecuación del cono:

• Vértice:  $O = (3, 2, 1)$

• Base:  $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 3^2; z = 5$

• ec. cono:  $z = \frac{4}{3} \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} + 1; (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 9$

✓ Sea  $S = S_1 \cup S_2$

✓ Por Teo. de divergencia:

$$\text{Flujo} = \oint_S F \cdot ds = \iiint_V \nabla \cdot F dx dy dz$$

\* Calculamos la divergencia:  $\text{Div} = \nabla \cdot F = 217$

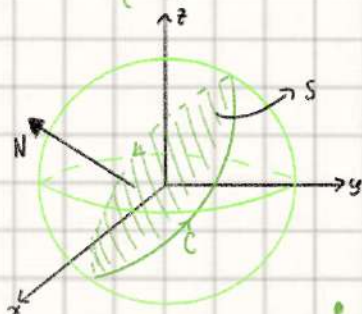
$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Flujo} &= \iiint_V 217 dv = 217 \iiint_V dv = 217 \cdot \text{Volumen} = 217 \cdot \frac{1}{3} \text{base} \cdot \text{altura} \\ &= 217 \cdot \frac{1}{3} \pi 3^2 \cdot 4 \end{aligned}$$

## ejemplo:

12. Usando el teorema de Stokes, evalúe la integral de línea:  $\int_C (y dx + z dy + x dz)$

Donde  $C$  es la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el plano  $x + y + z = 0$ .

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$



Para calcular directamente hay que parametrizar la curva:

$$\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

Aplicando Stokes:  $\oint_C F \cdot ds = \iint_S \nabla \times F \cdot ds$

Sea  $S$  la porción del plano interior a la esfera  $t_9$

$$S: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}; \mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 + x y \leq \frac{1}{2} a^2\}$$

Vector normal:  $\nabla \times F = (-1, -1, -1) \Rightarrow N = (1, 1, 1)$

$$\oint_C F \cdot d\alpha = \iint_S F \times \nabla \cdot ds$$

= \_\_\_\_\_

## Teorema de la divergencia → tmb llamado Teorema de Gauss

Sea  $S$  una superficie cerrada,  $V$  un sólido interior a  $S$  ( $S$  frontera del sólido  $V$ ).

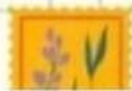
Sea  $F$  un campo vectorial definido en  $V \cup S$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces:

$$\iint_S F \cdot ds = \iiint_V \nabla \cdot F dV$$

El vector normal debe ser exterior a la superficie.

Observación:

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \iiint_V \text{Div } F dx dy dz$$



# ejemplo:

17. Sea  $S$  la frontera del elipsoide  $\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$

Calcule, directamente y usando el teorema de la divergencia, la integral de superficie

$$\iint_S \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} dS$$

✓ Parametrización:  $S: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \sin \phi \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \sin \phi \\ z = \sqrt{2} \cos \phi \end{cases}; \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{matrix}$

✓ Vector normal:

$$N = (dy \wedge dz; dz \wedge dx; dx \wedge dy)$$

$$=$$

$$\Rightarrow \|N\| =$$

✓  $\iint_S \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} dS = \iint_D \sqrt{2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + 4 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2 \cos^2 \phi} \cdot \|N\| d\theta d\phi$

✓ Comprobamos con Teo de Divergencia:

★  $\iint_S F \cdot n ds = \iiint_V \text{Div } F dv$

★  $F \cdot n = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$

• Como  $S: \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1 : \nabla G$

$\Rightarrow N = (x, 2y, z) \rightarrow$  exterior a la superficie

$\Rightarrow n = \frac{(x, 2y, z)}{\|(x, 2y, z)\|} = \frac{(x, 2y, z)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}}$

• Sea  $F = (P, Q, R)$

$\Rightarrow (P, Q, R) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{}}; \frac{2y}{\sqrt{}}; \frac{z}{\sqrt{}} \right) =$

$(P, Q, R) \cdot (x, 2y, z) \cdot (\sqrt{})^{-2} = x^2 + y^2 + z^2$

• Tomamos:  $\begin{cases} P = x \\ Q = 2y \\ R = z \end{cases} \Rightarrow F = (x, 2y, z)$

$\Rightarrow \iint_S \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} ds = \iint_S F \cdot n ds = \iint_S F \cdot ds = \iiint_V \text{Div } F dv = \iiint_V 4 dv = \iiint_V 4 dv = 4 \cdot \text{Volumen} = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2})^2 (\sqrt{2})^2 = \frac{64}{3} \pi$

