

UŁAMKI ZWYKŁE

Jak zbudowany jest ułamek zwykły?

Ułamek zwykły zbudowany jest z licznika i mianownika, oraz oddzielającej je kreski ułamkowej.

Licznik (liczba na górze) to to, o co nas pytają, na czym się skupiamy.

Mianownik (liczba na dole) to całość - to, ile części składa się na całość.

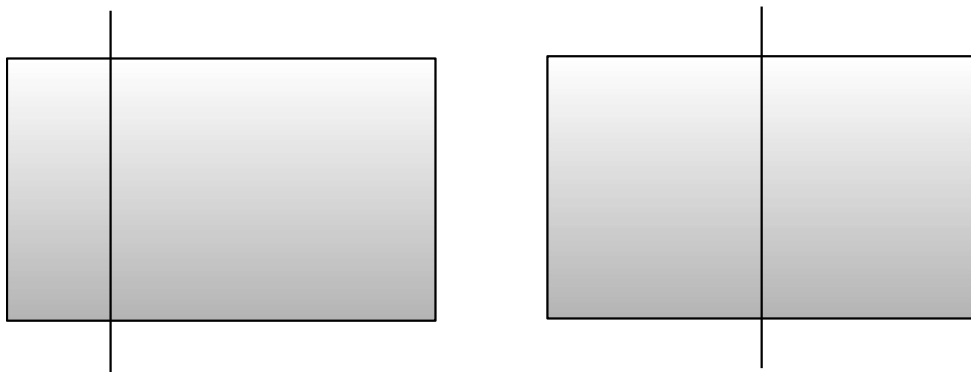
Kreska ułamkowa to kreska, która oddziela licznik i mianownik. Zastępuje ona znak dzielenia.

Przykładowo:

- Mam 5 cukierków, 2 z nich są owocowe. Cukierki owocowe stanowią więc $\frac{2}{5}$ moich cukierków.
- W klasie jest 30 osób, 10 nosi okulary. Osoby, które noszą okulary stanowią więc $\frac{10}{30}$ klasy.
- Tydzień ma 7 dni, weekend to 2 dni. Co za tym idzie, weekend stanowi $\frac{2}{7}$ tygodnia.

Przy ułamkach zwykłych mowa jest o **częściach**. Należy przy tym zapamiętać jedno, bardzo ważne zdanie: części muszą być równe!

Co to znaczy? Rozważmy sytuację: Ty i Twój kolega/koleżanka dostajecie czekoladę. Chcecie się nią podzielić. Jak się podzielicie?



Dzielcie się jak chcecie, ale zapamiętajcie jedno: tylko na drugim obrazku jest pokazany podział po $\frac{1}{2}$. Także, gdy przyjdzie Ci opisywać jakieś obrazki ułamkiem - zawsze zadaj pytanie "czy podział jest sprawiedliwy, czy części są równe?". Jeśli nie są - podziel figurę tak, by wszystkie części były równe.

Ułamek jako iloraz.

Jak już wiemy, kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia. Podajmy sobie kilka przykładów:

- Ułamek $\frac{1}{2}$ możemy zapisać jako dzielenie $1 \div 2$.
- Ułamek $\frac{3}{4}$ możemy zapisać jako dzielenie $3 \div 4$.
- Ułamek $\frac{12}{13}$ możemy zapisać jako dzielenie $12 \div 13$.
- Ułamek $\frac{10}{2}$ możemy zapisać jako dzielenie $10 \div 2$.

Podobnie możemy zrobić w drugą stronę:

- Dzielenie $2 \div 3$ możemy przedstawić jako ułamek $\frac{2}{3}$.
- Dzielenie $5 \div 8$ możemy przedstawić jako ułamek $\frac{5}{8}$.
- Dzielenie $17 \div 19$ możemy przedstawić jako ułamek $\frac{17}{19}$.
- Dzielenie $15 \div 3$ możemy przedstawić jako ułamek $\frac{15}{3}$.

Ułamki właściwe i niewłaściwe.

Ułamek właściwy to taki, którego licznik jest mniejszy od mianownika.

licznik < mianownik

Przykładami ułamków właściwych są m. in.: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{123}{1234}$ itp.

Ułamek niewłaściwy to taki, którego licznik jest równy mianownikowi lub większy od mianownika.

licznik $\geq$ mianownik

Przykłady ułamków niewłaściwych: $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{100}{12}$ i $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{100}{100}$ itp.

Warto zapamiętać! Ułamki niewłaściwe, które mają taki sam licznik i mianownik, są równe 1. Przykładowo: $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{12}{12} = 1$, $\frac{100}{100} = 1$.

Liczby mieszane.

Liczby mieszane składają się z części całkowitej (liczby całkowitej, całości) oraz części ułamkowej (ułamka zwykłego). Przykłady liczb mieszanych:

- $2\frac{1}{3}$ - dwie całe i jedna trzecia (ew. w skrócie: dwa i jedna trzecia),
- $10\frac{2}{7}$ - dziesięć całych i dwie siódme (ew.: dziesięć i dwie siódme),
- $1\frac{3}{10}$ - jedna cała i trzy dziesiąte (ew.: jeden i trzy dziesiąte).

Ułamki niewłaściwe możemy zamienić na **liczby mieszane**. Jak to robimy?

1. Zadajemy sobie pytanie: *ile całych mianowników mieści się w liczniku?* Tyle mamy całości.
2. Mnożymy otrzymaną liczbę całości przez mianownik.
3. Zadajemy sobie pytanie: *ile zostaje reszty?* Tyle mamy w liczniku.
4. Mianownik zostaje.

Przykłady:

- $\frac{17}{5}$ -> 5 mieści się trzy razy w 17 (mamy 3 całości) -> $3 \times 5 = 15$, więc zostaje nam reszta 2 -> wychodzi nam $3\frac{2}{5}$.
- $\frac{20}{3}$ -> 3 mieści się sześć razy w 20 (mamy 6 całości) -> $6 \times 3 = 18$, więc zostaje nam reszta 2 -> wychodzi nam $6\frac{2}{3}$.
- $\frac{28}{4}$ -> 4 mieści się siedem razy w 28 (mamy 7 całości) -> $7 \times 4 = 28$, więc nie zostaje reszta -> wychodzi nam 7.

Tutaj można przypomnieć sobie też fakt, że ułamek możemy zamienić na dzielenie. Co za tym idzie, zamienianie ułamków niewłaściwych na liczby mieszane możesz sobie właśnie wyobrażać jako **dzielenie z resztą**.

- $\frac{17}{5}$ -> $17 : 5 = 3$, reszta 2 -> $3\frac{2}{5}$.
- $\frac{20}{3}$ -> $20 : 3 = 6$, reszta 2 -> $6\frac{2}{3}$.
- $\frac{28}{4}$ -> $28 : 4 = 7$, bez reszty -> 7.

Możemy też w drugą stronę - zamienić liczby mieszane na ułamki niewłaściwe. Aby to zrobić, wystarczy zapamiętać sekwencję:

1. Całość $\times$ mianownik + licznik -> do licznika,
2. Mianownik zostaje.

Przykłady:

- $1\frac{2}{3}$ -> licznik: $1 \times 3 + 2 = 3 + 2 = 5$, mianownik zostaje: 3, więc otrzymujemy ułamek $\frac{5}{3}$.
- $3\frac{4}{7}$ -> licznik: $3 \times 7 + 4 = 21 + 4 = 25$, mianownik zostaje: 7, więc otrzymujemy ułamek $\frac{25}{7}$.
- $10\frac{1}{9}$ -> licznik: $10 \times 9 + 1 = 90 + 1 = 91$, mianownik zostaje: 9, więc otrzymujemy ułamek $\frac{91}{9}$.

Tu warto pamiętać o tym, że ułamek o jednakowym liczniku i mianowniku (na przykład $\frac{9}{9}$) jest równy 1. Co za tym idzie - każdy kolejny raz, gdy dodamy sobie mianownik do licznika da nam kolejną całość: $\frac{9}{9} = 1$, $\frac{18}{9} = 2$, $\frac{27}{9} = 3$, $\frac{36}{9} = 4$ itd.

Rozszerzanie i skracanie ułamków.

Aby **rozszerzyć ułamek**, należy pomnożyć jego licznik oraz mianownik przez tę samą liczbę.

Przykłady:

- $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ (rozszerzenie przez 3),
- $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$ (rozszerzenie przez 5),
- $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 20}{5 \times 20} = \frac{20}{100}$ (rozszerzenie przez 20).

Aby **skrócić ułamek**, należy podzielić jego licznik oraz mianownik przez tę samą liczbę.

Przykłady:

- $\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$ (skrócenie przez 3),
- $\frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$ (skrócenie przez 5),
- $\frac{20}{100} = \frac{20 \div 20}{100 \div 20} = \frac{1}{5}$ (skrócenie przez 20).

Warto zwrócić uwagę na to, że rozszerzenie/skrócenie ułamka nie zmienia nam jego wartości - mnożymy/dzielimy licznik i mianownik przez tę samą liczbę, więc w rzeczywistości mnożymy $\times 1$ lub dzielimy $\div 1$.

Ułamek nieskracalny to taki, którego (kolokwialnie mówiąc) nie da się już bardziej skrócić. To znaczy, że licznik i mianownik takiego ułamka nie mają już żadnego innego wspólnego dzielnika niż 1.

Wspólny mianownik.

Czasem potrzebujemy sprowadzić nasze ułamki do **wspólnego mianownika** (np. żeby je porównać albo dodać/odjąć). Jak to robimy?

1. Szukamy NWW (najmniejszej wspólnej wielokrotności) dla mianowników, które mamy - to nasz wspólny mianownik.
2. Rozszerzamy ułamki do wspólnego mianownika.

Przykłady:

- $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ -> NWW dla 3 i 4 to 12 -> rozszerzamy ułamki do mianownika 12:
 $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ oraz $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$.
- $\frac{2}{5}$ i $\frac{7}{10}$ -> NWW dla 5 i 10 to 10 -> rozszerzamy ułamki do mianownika 10:
 $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$ oraz $\frac{7}{10}$ (drugi ułamek zostaje, bo już ma mianownik 10).
- $\frac{7}{12}$ i $\frac{1}{8}$ -> NWW dla 12 i 8 to 24 -> rozszerzamy ułamki do mianownika 24:
 $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}$ oraz $\frac{1}{8} = \frac{1 \times 3}{8 \times 3} = \frac{3}{24}$.

Dodawanie i odejmowanie ułamków.

Poniżej opisane są zasady, o których warto pamiętać przy dodawaniu i odejmowaniu ułamków zwykłych.

Dodawanie:

1. Musi być wspólny mianownik (jeśli go nie ma, trzeba sprowadzić do wspólnego mianownika),
2. Dodajemy licznik z licznikiem, mianownik zostaje.
3. Jeśli mamy całości - dodajemy całości z całościami.

Na końcu, jeśli można, skracamy wynik lub wyciągamy całości.

Przykłady:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{1}{5} + \frac{2}{5} &= \frac{3}{5}, \\ \blacksquare \frac{3}{10} + \frac{1}{5} &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \\ \blacksquare 2\frac{1}{8} + 1\frac{2}{8} &= 3\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Odejmowanie:

1. Musi być wspólny mianownik (jeśli go nie ma, trzeba sprowadzić do wspólnego mianownika),
2. Jeśli się da - odejmujemy licznik z licznikiem, mianownik zostaje. (Jeśli się nie da (jeśli pierwszy licznik jest mniejszy od drugiego) - pożyczamy całości.)
3. Jeśli mamy całości - odejmujemy całości z całościami.

Na końcu, jeśli można, skracamy wynik lub (jeśli można) wyciągamy całości.

Przykłady:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{4}{5} - \frac{1}{5} &= \frac{3}{5}, \\ \blacksquare \frac{9}{10} - \frac{1}{5} &= \frac{9}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}, \\ \blacksquare 3\frac{1}{8} - 1\frac{3}{8} &= 2\frac{9}{8} - 1\frac{3}{8} = 1\frac{6}{8} = 1\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Przyjrzyjmy się jeszcze dokładnie **pożyczaniu całości**, które przydaje nam się przy odejmowaniu. Żeby pożyczyć całość wystarczy:

1. "Zabrać" (odjąć) jedną całość,
2. Dodać mianownik do licznika.
3. Zostawić w mianowniku liczbę, która jest.

A co jeśli chcemy pożyczyć całość od liczby całkowitej, nie liczby mieszanej? W takiej sytuacji wystarczy:

1. "Zabrać" (odjąć) jedną całość,
2. Obok postawić ułamek o takim samym liczniku i mianowniku, np. $\frac{3}{3}$ (najlepiej takim, jak mianownik liczby, którą odejmujemy).

Mnożenie ułamków zwykłych.

Mnożenie ułamków zwykłych jest naprawdę proste. Wystarczy trzymać się poniższych zasad:

1. Liczby mieszane i całkowite zamieniamy na ułamki niewłaściwe!

2. Mnożymy licznik z licznikiem, mianownik z mianownikiem.

Jeśli to możliwe, możemy skracać ze sobą liczby na ukos, "na krzyż". A na końcu, jeśli można, skracamy wynik lub wyciągamy całości.

Przykłady:

$$\blacksquare \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8},$$

$$\blacksquare \frac{5}{7} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{1 \times 2}{7 \times 2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \text{ (tu skróciliśmy 5 i 10 na ukos),}$$

$$\blacksquare 1\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{11}{5} = \frac{4 \times 11}{3 \times 5} = \frac{44}{15} = 2\frac{14}{15}.$$

Dzielenie ułamków zwykłych.

Dzielenie ułamków zwykłych jest całkiem proste, szczególnie gdy potrafimy mnożyć. Należy tylko zapamiętać zasady:

1. Liczby mieszane i całkowite zamieniamy na ułamki niewłaściwe!

2. Zamieniamy dzielenie na mnożenie przez odwrotność:

- pierwszy ułamek zostawiamy "w spokoju",

- zmieniamy znak na mnożenie,

- drugi ułamek obracamy "do góry nogami",

3. Mnożymy według zasad mnożenia.

Na końcu, jeśli można, skracamy wynik lub wyciągamy całości.

Przykłady:

$$\blacksquare \frac{1}{2} \div \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10},$$

$$\blacksquare \frac{5}{7} \div \frac{15}{14} = \frac{5}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{1 \times 2}{1 \times 3} = \frac{2}{3} \text{ (tu skróciliśmy 5 i 15 oraz 7 i 14),}$$

$$\blacksquare 1\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{5} = \frac{4}{3} \div \frac{11}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{11} = \frac{4 \times 5}{3 \times 11} = \frac{20}{33}.$$

Potęgowanie ułamków zwykłych.

Potęgowanie ułamków zwykłych można wykonać na 2 sposoby:

1. Potęgowanie jest wielokrotnym mnożeniem, więc ułamek podniesiony do danej potęgi wystarczy po prostu pomnożyć przez siebie samego daną liczbę razy. Przykład: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$

2. Jeśli podnosimy dany ułamek do potęgi, możemy po prostu podnieść do tej potęgi jego licznik i mianownik. Przykład: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}.$

Ułamek z liczby. Liczba z ułamka.

Aby obliczyć **ułamek z danej liczby** wystarczy skorzystać z tej "sztuczki":

ułamek z liczby $\rightarrow$ *ułamek razy liczba*

"Z" rymuje się z "razy". Co to znaczy? A no mniej więcej, nie więcej niż to, że aby obliczyć jakiś ułamek z danej liczby, wystarczy pomnożyć ten ułamek przez liczbę!

Przykłady:

- $\frac{1}{2}$ z liczby 30 $\rightarrow \frac{1}{2} \times 30 = \frac{1}{2} \times \frac{30}{1} = \frac{30}{2} = 15$,
- $\frac{4}{5}$ z liczby 25 $\rightarrow \frac{4}{5} \times 25 = \frac{4}{5} \times \frac{25}{1} = \frac{4}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{20}{1} = 20$,
- $1\frac{1}{2}$ z liczby 10 $\rightarrow 1\frac{1}{2} \times 10 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{1} = 15$.

Analogicznie możemy obliczyć **liczbę, mając podany jej ułamek**. Wtedy wystarczy odwrócić sytuację - skoro *jakaś liczba* $\times \frac{2}{3} = 8$, to żeby obliczyć tę liczbę, wystarczy obustronnie podzielić przez $\frac{2}{3} \rightarrow$ *jakaś liczba* $= 8 \div \frac{2}{3}$.

Co to znaczy? To znaczy, że aby obliczyć jakąś liczbę, mając podany jej ułamek, wystarczy wykonać dzielenie: liczba będąca częścią "oryginalnej" liczby przez ułamek, którym jest.

Przykłady:

- $\frac{1}{2}$ z liczby to 15 $\rightarrow 15 \div \frac{1}{2} = \frac{15}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{15}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{30}{1} = 30$,
- $\frac{4}{5}$ z liczby to 20 $\rightarrow 20 \div \frac{4}{5} = \frac{20}{1} \div \frac{4}{5} = \frac{20}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{25}{1} = 25$,
- $1\frac{1}{2}$ z liczby to 15 $\rightarrow 15 \div 1\frac{1}{2} = \frac{15}{1} \div \frac{3}{2} = \frac{15}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{1} = 10$.